千葉大本番レベル模試

解答・解説・採点基準

全９問

$\boxed{1}$ （５０点）

【解答・採点基準】

解答	採点基準
(1)	**(1)　20 点**
サイコロを3回振ったときの目の出方は 6^3 通りあり，これらは同様に確からしい。a, b, c の対称性より，$a \leqq b \leqq c$ の場合を考えると，$a+b+c=10$ となる (a, b, c) の組み合わせは $$(a, b, c)=(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$$	**目の出方は全部で 6^3 通り‥5 点** **・式中で読み取れれば可** **組み合わせの列挙‥10 点(完答)**
の6通りであり，このうち a, b, c が相異なるものが3通り，a, b, c のうち2つだけ重複しているものが3通りある。また，これらの組み合わせは，a, b, c を入れ替えても $a+b+c=10$ となる。よって，求める確率は $$\frac{3\cdot 3!+3\cdot {}_3C_1}{6^3}=\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$$ である。	
(答) $\frac{1}{8}$	**答‥5 点**
(2)	**(2)　30 点**
(1)と同様に，a, b, c の対称性より，$a \leqq b \leqq c$ の場合を考える。このとき，$0<\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{a}$ であるから， $$\frac{1}{a}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}$$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{a}<1 \leqq \frac{3}{a}$$	**$a \leqq b \leqq c$ の場合を考える‥8 点**

$\Leftrightarrow 1 < a \leqq 3 \qquad \cdots ①$	$1 < a \leqq 3$・・**8 点**
となる。	
[1] $a = 2$ のとき	
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$ $$\Leftrightarrow 2c+2b=bc$$ $$\Leftrightarrow (b-2)(c-2)=4$$	
となり，これを満たす $(b,\ c)$ の組は，$2 \leqq b \leqq c \leqq 6$ より $$(b,\ c)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$$ である。	$a=2$ **のときの** $(b,\ c)$ **の組・・4 点**
[2] $a = 3$ のとき	
①の等号が成立するため， $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}$$ の等号も成立する。いま $a \leqq b \leqq c$ であるから，この等号が成立するのは $$a=b=c$$ のときに限られる。よって， $$(b,\ c)=(3,\ 3)$$ である。	$a=3$ **のときの** $(b,\ c)$ **の組・・4 点**
以上[1], [2]より，$a \leqq b \leqq c$ のとき $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ となる $(a,\ b,\ c)$ の組み合わせは $$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$$ となる。また，これらの組み合わせは，a, b, c を入れ替えても $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ となる。よって，求める確率は $$\frac{3!+{}_3\mathrm{C}_1+1}{6^3}=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$$ である。	

(答) $\dfrac{5}{108}$

(2)[別解]

$a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のそれぞれにおいて，題意を満たす $(b,\ c)$ の組を数え上げる。

[1] $a=1$ のとき

題意を満たす $(b,\ c)$ の組は存在しない。

[2] $a=2$ のとき

$$(b,\ c)=(3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3)$$

のとき題意を満たす。

[3] $a=3$ のとき

$$(b,\ c)=(2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (6,\ 2)$$

のとき題意を満たす。

[4] $a=4$ のとき

$$(b,\ c)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)$$

のとき題意を満たす。

[5] $a=5$ のとき

題意を満たす $(b,\ c)$ の組は存在しない。

[6] $a=6$ のとき

$$(b,\ c)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

のとき題意を満たす。

以上[1], [2], [3], [4], [5], [6]より，題意を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は10通りあるから，求める確率は

$$\frac{10}{6^3}=\frac{5}{108}$$

である。

(答) $\dfrac{5}{108}$

答‥6 点

(2)[別解]　30 点

$a=1$ のとき‥4 点

$a=2$ のとき‥4 点

$a=3$ のとき‥4 点

$a=4$ のとき‥4 点

$a=5$ のとき‥4 点

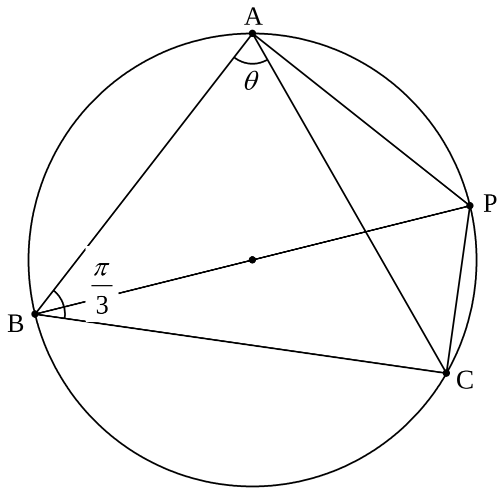
$a=6$ のとき‥4 点

答‥6 点

$\boxed{2}$ （５０点）

【解答・採点基準】

(1) $\angle \mathrm{BCA} = \frac{2}{3}\pi - \theta$ であるから，△ABC について正弦定理より， $$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle \mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{BA}}{\sin\angle \mathrm{BCA}} = \frac{\mathrm{CB}}{\sin\angle \mathrm{CAB}} = 2\cdot 1$$ $$\therefore \mathrm{AC} = 2\sin\frac{\pi}{3},\ \mathrm{BA} = 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right),\ \mathrm{CB} = 2\sin\theta$$ となる。よって，△ABC の周の長さは $$\begin{aligned} L &= \mathrm{AC} + \mathrm{BA} + \mathrm{CB} \\ &= 2\sin\frac{\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right) + 2\sin\theta \\ &= \sqrt{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right) + 2\sin\theta \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3}\cos\theta + 3\sin\theta \\ &= \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$ となる。$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{2}{3}\pi$ より，$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ のとき，すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき L は最大値 $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ をとる。 (答) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき，最大値 $3\sqrt{3}$	(1)　20 点 AC, BA, CB ‥5 点 (完答) L を $\cos\theta, \sin\theta$ で表して‥5 点 L を 1 つの θ で表して‥5 点 答‥5 点
(2)	(2)　20 点



$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$ と $\angle\mathrm{BCA}=\frac{2}{3}\pi-\theta$ より $\frac{\pi}{6}<\angle\mathrm{BCA}<\frac{\pi}{2}$ となるから，△ABC は鋭角三角形である。よって，上図のように円 O の中心は△ABC の内部にある。円周角の定理より，

$$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{ACB}=\frac{2}{3}\pi-\theta$$
$$\angle\mathrm{BAP}=\frac{\pi}{2}$$

であり，これと $\mathrm{BP}=2$ より，$\mathrm{AP}=2\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)$ である。同様に，

$$\angle\mathrm{BPC}=\angle\mathrm{BAC}=\theta$$
$$\angle\mathrm{BCP}=\frac{\pi}{2}$$

より，$\mathrm{CP}=2\cos\theta$ である。また，円に内接する四角形の性質より，

$$\angle\mathrm{APC}=\pi-\angle\mathrm{ABC}=\frac{2}{3}\pi$$

であるから，△APC の面積は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{CP}\cdot\sin\angle\mathrm{APC}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)\cdot2\cos\theta\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\\&=\sqrt{3}\cos\theta\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

AP, CP‥**5 点**(**完答**)

・AP, CP, AC$\left(=\sqrt{3}\right)$ **のうち 2 つを正しく求められていれば可**

$\angle\mathrm{APC}$‥**5 点**

・$\angle\mathrm{PCA}=\theta-\frac{\pi}{6}$ **または** $\angle\mathrm{CAP}=\frac{\pi}{2}-\theta$ **を求められていれば可**

S **の立式‥5 点**

となる。したがって，$\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \beta=\frac{3}{2}$ となる。

(答) $\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \beta=\frac{3}{2}$

答‥5 点

(3)

(3)　10 点

半角の公式と 2 倍角の公式より，

$$\begin{aligned}S&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta\\&=-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos2\theta)+\frac{3}{4}\sin2\theta\\&=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

S を $\cos2\theta,\ \sin2\theta$ で表して‥5 点

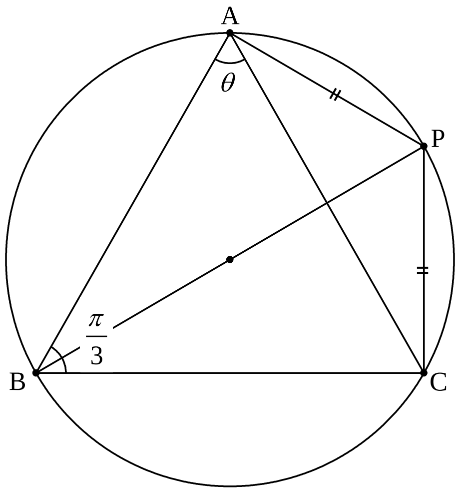
となる。よって，$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$ より，$2\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ のとき，すなわち $\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき S は最大値 $-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ をとる。

(答) $\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき，最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

答‥5 点

(3)[別解]

(3)[別解]　10 点



線分 AC の長さは $\sqrt{3}$ で一定であり，$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より点 P は短い方の弧 AC の全体(端点を除く)を動く。よって，△APC の面積が最大

になるのは，点 P と直線 AC の距離が最大になるとき，すなわち上図のように $\mathrm{AP}=\mathrm{CP}$ となるときである。このとき，

$$\mathrm{AP}=\mathrm{CP}=1,\ \angle\mathrm{APC}=\frac{2}{3}\pi$$

であるから，$\triangle$ APC の面積 S の最大値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{CP}\cdot\sin\angle\mathrm{APC}&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

となる。また，このとき $\angle\mathrm{PAC}=\frac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{PAB}=\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\theta&=\angle\mathrm{PAB}-\angle\mathrm{PAC}\\&=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき，最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\mathrm{AP}=\mathrm{CP}$ のとき最大

‥5 点

答‥5 点

3 （５０点）

【解答・採点基準】

(1)

$f(x)=x|x-a|-(x-a)$ としたとき，方程式 $f(x)=0$ の相異なる実数解の個数が3個となる a の範囲を求めればよい。$f(x)$ は $x \geqq a$ のとき

$$f(x)=x(x-a)-(x-a)$$
$$=(x-1)(x-a)$$

となり，$x<a$ のとき

$$f(x)=x(a-x)-(x-a)$$
$$=-(x+1)(x-a)$$

となる。

[1]　$0<a<1$ のとき

$f(x)=0$ の相異なる実数解は $x \geqq a$ の範囲に $x=a, 1$ の 2 個があり，$x<a$ の範囲に $x=-1$ の1個があるから，全体で3個となる。よって，$0<a<1$ のとき，つねに条件を満たす。

[2]　$1 \leqq a$ のとき

$f(x)=0$ の相異なる実数解は $x \geqq a$ の範囲に $x=a$ の1個があり，$x<a$ の範囲に $x=-1$ の1個があるから，全体で 2 個となる。よって，$1 \leqq a$ のとき，つねに条件を満たさない。

以上, [1], [2]より，求める範囲は $0<a<1$ である。

(答)　$0<a<1$

(2)

[1]　$0<a<1$ のとき

(1)より，$S(a)$ は下図の斜線部分の面積の和である。

(1)　20 点

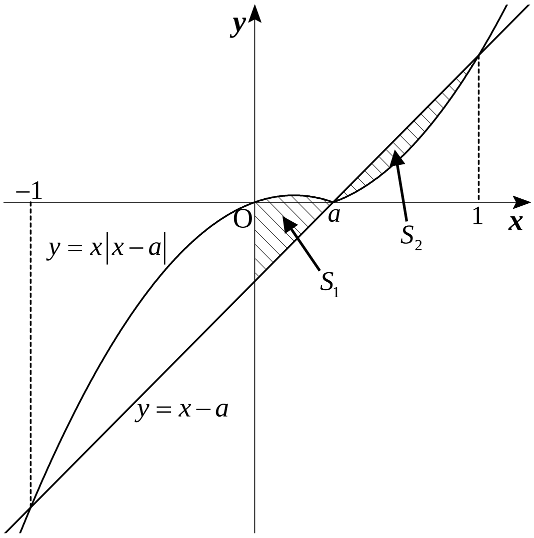
場合分けにより $f(x)$ の絶対値記号を外して‥5 点

$0<a<1$ のとき条件を満たすことを示して‥5 点

$a=1$ のとき条件を満たさないことを示して‥5 点

$a>1$ のとき条件を満たさないことを示して‥5 点

(2)　30 点



$0 \leqq x \leqq a$ を満たす領域の面積を S_1，$a \leqq x \leqq 1$ を満たす領域の面積を S_2 とすると，

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^a -(x+1)(x-a)\,dx \\
&= \int_0^a \left(-x^2+ax-x+a\right)dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}-\frac{x^2}{2}+ax\right]_0^a \\
&= -\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}-\frac{a^2}{2}+a^2 \\
&= \frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_a^1 -(x-1)(x-a)\,dx \\
&= \frac{(1-a)^3}{6} \\
&= -\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

となる。よって，

$$
\begin{aligned}
S(a) &= S_1+S_2 \\
&= a^2-\frac{a}{2}+\frac{1}{6} \\
&= \left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{48}
\end{aligned}
$$

より，$a=\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{5}{48}$ をとる。

[I]のときの面積を

$\int_0^a -(x+1)(x-a)\,dx$
$+\int_a^1 -(x-1)(x-a)\,dx$

と立式して‥5 点

[I]のときの面積は

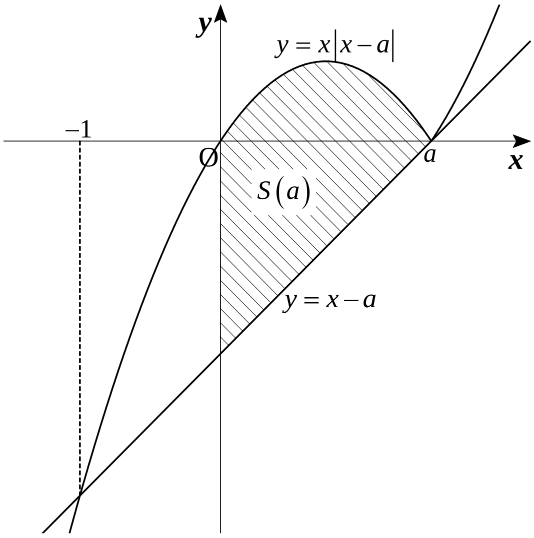
$a^2-\frac{a}{2}+\frac{1}{6}$ **‥5 点**

[I]のときの最小値

‥5 点

[2] $1 \leqq a$ のとき

(1)より，$S(a)$ は下図の斜線部分の面積である。



よって，

$$S(a)=\int_0^a -(x+1)(x-a)\,dx$$
$$=\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}\ (\because [1])$$

となり，これは $1 \leqq a$ の範囲で単調に増加するから，$a=1$ のとき最小値 $\frac{2}{3}$ をとる。

以上, [1], [2]より，求める $S(a)$ の最小値は $\frac{5}{48}$ である。

(答) $\frac{5}{48}$

[2]のときの面積を

$\int_0^a -(x+1)(x-a)\,dx$

と立式して‥5 点

[2]のときの最小値‥5 点

・[1]のときの最小値より大きいことを示せていれば可

答‥5 点

$\boxed{4}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

$p<r$ より，直線PR は y 軸に平行ではないため，a, b を実数とし，直線PR の方程式を $y=ax+b$ とする。直線PR は P, R において C に接するため，x についての 4 次方程式 $f(x)=ax+b$ は $x=p, r$ を解にもち，それぞれ重解である。また，$f(x)-(ax+b)$ の最高次の係数は 2 であるため，

$$f(x)-(ax+b)=2(x-p)^2(x-r)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^4+4x^3-x^2-ax-b=2x^4-4(p+r)x^3$$
$$+2(p^2+r^2+4pr)x^2-4pr(p+r)x+2p^2r^2$$

は x についての恒等式となる。よって，

$$\begin{cases} 4=-4(p+r) & \cdots ① \\ -1=2(p^2+r^2+4pr) & \cdots ② \\ -a=-4pr(p+r) & \cdots ③ \\ -b=2p^2r^2 & \cdots ④ \end{cases}$$

となる。ここで，①より，$p+r=-1$ であり，②より，

$$-1=2(p^2+r^2+4pr)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=(p+r)^2+2pr$$
$$\therefore pr=-\frac{3}{4}$$

であるため，③，④より

$$a=4pr(p+r)$$
$$=4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(-1)$$
$$=3$$
$$b=-2p^2r^2$$
$$=-2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2$$
$$=-\frac{9}{8}$$

となる。したがって，直線PR の方程式は $y=3x-\frac{9}{8}$ である。

(1)　30 点

$f(x)-(ax+b)$
$=2(x-p)^2(x-r)^2$
のように置けることを述べて‥10 点

①,②‥5 点（完答）

③,④‥5 点（完答）

(答)　$y=3x-\dfrac{9}{8}$

答・・10 点

(1)[別解]

(1)[別解]　30 点

$f(x)=2x^4+4x^3-x^2$ より，

$$f'(x)=8x^3+12x^2-2x$$

$f'(x)$・・5 点

であるため，直線 PR の方程式は

$$y=f'(p)(x-p)+f(p)$$

$$\Leftrightarrow y=(8p^3+12p^2-2p)(x-p)+(2p^4+4p^3-p^2)\quad・・・⑤$$

直線 PR の方程式

⑤・・5 点

となる。また，

$$f(x)=(8p^3+12p^2-2p)(x-p)+(2p^4+4p^3-p^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^4+4x^3-x^2=(8p^3+12p^2-2p)(x-p)$$

$$+(2p^4+4p^3-p^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4-p^4)+4(x^3-p^3)-(x^2-p^2)$$

$$-(8p^3+12p^2-2p)(x-p)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-p)\{2(x^3+px^2+p^2x+p^3)$$

$$+4(x^2+px+p^2)-(x+p)-(8p^3+12p^2-2p)\}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-p)\{2x^3+(2p+4)x^2$$

$$+(2p^2+4p-1)x+(-6p^3-8p^2+p)\}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-p)^2\{2x^2+4(p+1)x+(6p^2+8p-1)\}=0$$

となり，直線 PR は R において C に接するため，この方程式は $x=r$ を重解にもつ。したがって，$p\neq r$ より，2 次方程式

この 4 次方程式が $x=r$ を重解にもつことを述べて・・5 点

$$2x^2+4(p+1)x+(6p^2+8p-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+p+1)^2+(4p^2+4p-3)=0$$

$$\therefore 2(x+p+1)^2+4\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}\right)=0$$

は $x=r$ を重解にもつため，$r=-p-1$ かつ $4\left(p-\dfrac{1}{2}\right)\left(p+\dfrac{3}{2}\right)=0$ であり，

この 2 つの条件を導いて・・5 点

$$p<r$$

$$\Leftrightarrow p<-p-1$$

$$\therefore p<-\frac{1}{2}$$

より，$p=-\frac{3}{2}$ となる。これを⑤に代入して，直線 PR の方程式は

$y=3x-\frac{9}{8}$ となる。

(答) $y=3x-\frac{9}{8}$

答‥10 点

(2)

(2) 30 点

(1)より $p+r=-1,\ pr=-\frac{3}{4}$ であるため，解と係数の関係より，$p,\ r$ は

$$x^2+x-\frac{3}{4}=0$$
$$\therefore\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$$

の解である。したがって，$p<r$ より $(p,\ r)=\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ となる。これと，直線 PR : $y=3x-\frac{9}{8}$ より，$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{45}{8}\right)$, $\mathrm{R}\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{8}\right)$ となる。よって，線分 PR の長さは，

$p,\ r$ の値

‥5 点(完答)

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^2+\left\{\frac{3}{8}-\left(-\frac{45}{8}\right)\right\}^2}=2\sqrt{10}$$

線分 PR の長さ

‥5 点

である。また，$-\frac{3}{2}<q<\frac{1}{2}$ であり，点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ から直線 PR : $3x-y-\frac{9}{8}=0$ までの距離は，点と直線の距離の公式より，

$$\frac{\left|3q-f(q)-\frac{9}{8}\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\left|3q-2q^4-4q^3+q^2-\frac{9}{8}\right|}{\sqrt{10}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|2q^4+4q^3-q^2-3q+\frac{9}{8}\right|$$

点 Q から直線 PR までの距離‥5 点

であるため，

$$g(q)=2q^4+4q^3-q^2-3q+\frac{9}{8}\quad\left(-\frac{3}{2}<q<\frac{1}{2}\right)$$

とおくと，△PQR の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\left|2q^4+4q^3-q^2-3q+\frac{9}{8}\right|=|g(q)|$$

となる。ここで,

$$g'(q)=8q^3+12q^2-2q-3$$
$$=8\left(q-\frac{1}{2}\right)\left(q+\frac{1}{2}\right)\left(q+\frac{3}{2}\right)$$

となるため,

$$g'(q)=0$$
$$\Leftrightarrow q=-\frac{1}{2}\left(\because -\frac{3}{2}<q<\frac{1}{2}\right)$$

である。よって，$g(q)$ の増減は下表の通りである。

q	$\left(-\frac{3}{2}\right)$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$g'(q)$		$+$	0	$-$	
$g(q)$	(0)	$\nearrow$	2	$\searrow$	(0)

上表より，$-\frac{3}{2}<q<\frac{1}{2}$ において $g(q)>0$ であるため，△PQR の面積は $g(q)$ であり，$g(q)$ は $q=-\frac{1}{2}$ のとき，最大値 2 をとる。

(答)　2

(2)[別解 1](線分 PR の長さの導出)

(p, r の値の導出まで本解と共通)

$\mathrm{P}\left(p,\ 3p-\frac{9}{8}\right)$, $\mathrm{R}\left(r,\ 3r-\frac{9}{8}\right)$ より，線分 PR の長さは,

$$\sqrt{(r-p)^2+\left\{\left(3r-\frac{9}{8}\right)-\left(3p-\frac{9}{8}\right)\right\}^2}=\sqrt{10}(r-p)\ (\because p<r)$$
$$=2\sqrt{10}$$

である。

(以下，本解と共通)

(2)[別解 2](△PQR の面積の導出)

(p, r の値の導出まで本解と共通)

△PQR の面積

‥5 点

$g(q)$ の増減表

‥5 点

答‥5 点

(2)[別解 1]　30 点

共通部分‥5 点

線分 PR の長さ

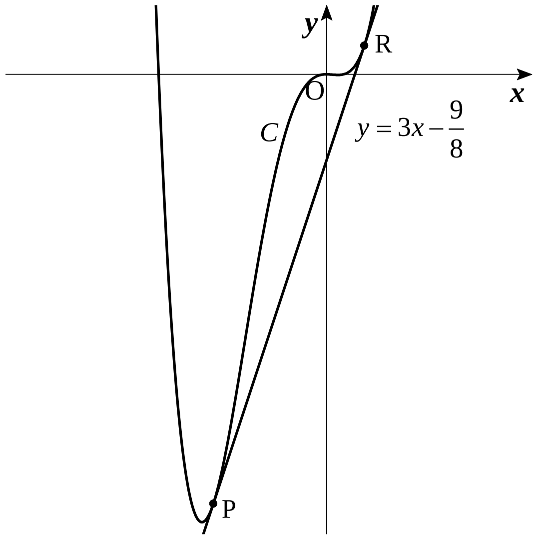
‥5 点

共通部分‥20 点

(2)[別解 2]　30 点

共通部分‥5 点

$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{45}{8}\right)$, $\mathrm{Q}\left(q,\ f(q)\right)$, $\mathrm{R}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$ より,	
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} q+\frac{3}{2} \\ f(q)+\frac{45}{8} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$	$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ ‥5 点 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ ‥5 点
となるため, △PQR の面積は,	
$$\frac{1}{2}\left\|\left(q+\frac{3}{2}\right)\cdot 6 - 2\cdot\left(f(q)+\frac{45}{8}\right)\right\| = \left\|f(q)-3q+\frac{9}{8}\right\|$$ $$= \left\|2q^4+4q^3-q^2-3q+\frac{9}{8}\right\|$$	△PQR の面積 ‥5 点
である。	
(以下, 本解と共通)	共通部分‥10 点
(2)[別解 3]	(2)[別解 3]　30 点
($\triangle\mathrm{PQR} = \left\|2q^4+4q^3-q^2-3q+\frac{9}{8}\right\|$ まで本解と共通)	共通部分‥20 点
△PQR の面積は,	
$$\left\|2q^4+4q^3-q^2-3q+\frac{9}{8}\right\| = \left\|2\left(q-\frac{1}{2}\right)^2\left(q+\frac{3}{2}\right)^2\right\|$$ $$= 2\left(q-\frac{1}{2}\right)^2\left(q+\frac{3}{2}\right)^2$$ $$= 2\left\{-\left(q-\frac{1}{2}\right)\left(q+\frac{3}{2}\right)\right\}^2$$ $$= 2\left\{-\left(q+\frac{1}{2}\right)^2+1\right\}^2$$	左式‥5 点
となる。 $-\frac{3}{2} < q < \frac{1}{2}$ において, $-\left(q+\frac{1}{2}\right)^2+1>0$ であるため,	
△PQR の面積は $q=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 2 をとる。	
(答)　2	答‥5 点
(2)[別解 4]	(2)[別解 4]　30 点
($p,\ r$ の値の導出まで本解と共通)	共通部分‥5 点
曲線 C と直線 PR は下図のようになる。	



上図より，△PQR の面積が最大になるのは，直線 PR と「点 Q における C の接線」が平行であるとき，すなわち，$f'(q)=3$ となるときである。また，$-\frac{3}{2}<q<\frac{1}{2}$ より，

$f'(q)=3$・・**10 点**

$$
\begin{aligned}
&f'(q)=3\\
&\Leftrightarrow 8q^3+12q^2-2q=3\\
&\Leftrightarrow 8\left(q-\frac{1}{2}\right)\left(q+\frac{1}{2}\right)\left(q+\frac{3}{2}\right)=0\\
&\therefore q=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となるため，$q=-\frac{1}{2}$ のとき △PQR の面積は最大になる。このとき，点 Q における C の接線の方程式は，

$q=-\frac{1}{2}$ のとき最大・・**5 点**

$$
\begin{aligned}
&y=3\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+f\left(-\frac{1}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow y=3\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{8}\\
&\Leftrightarrow y=3x+\frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

である。よって，$\mathrm{T}\left(0,\ \frac{7}{8}\right)$ とすると，直線 $y=3x-\frac{9}{8}$ と直線 $y=3x+\frac{7}{8}$ は平行であるため，△PQR の面積と △PTR の面積は等しい。したがって，△PQR の面積の最大値は，

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{7}{8}-\left(-\frac{9}{8}\right)\right\}\cdot(r-p)=2$$

である。

(答) 2

△PQR の面積の最大値の立式‥5 点

答‥5 点

$\boxed{5}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

正の整数 n に対し，$S_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $T_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ とおく。$S_n=T_n$ が成り立つことを正の整数 n に関する数学的帰納法により証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$$S_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$
$$T_1=\frac{1}{2}$$

であるため，$S_1=T_1$ が成り立つ。

[2]　$n=m$ (m は正の整数)のとき

$S_n=T_n$ が成り立つと仮定する。このとき，

$$S_{m+1}=\sum_{k=1}^{2m+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
$$=S_m+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$$
$$T_{m+1}=\sum_{k=m+2}^{2m+2}\frac{1}{k}$$
$$=T_m-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}$$
$$=T_m+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$$

であるため，$S_m=T_m$ より $S_{m+1}=T_{m+1}$ が成り立つ。よって，$n=m$ のとき $S_n=T_n$ が成り立つならば，$n=m+1$ のときも $S_n=T_n$ が成り立つ。

以上, [1], [2]より，正の整数 n に対して，$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ が成り立つ。

(証明終)

(1)[別解]

正の整数 n に対し，

---

(1)　15 点

$n=1$ のときに成り立つことを示して‥4 点

$n=m$ のとき成り立つならば $n=m+1$ のときも成り立つことを示して‥7 点

証明完了‥4 点

(1)[別解]　15 点

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad\left(\because -\frac{1}{2k}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
$$=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)より，正の整数 n に対し，

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$$

であるため，区分求積法より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n}+1}$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{x+1}$$
$$=\Big[\log|x+1|\Big]_0^1$$
$$=\log 2$$

である。また，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{1}{2n+1}\right\}$$
$$=\log 2+0$$
$$=\log 2$$

となるため，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ は収束し，求める値は，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\log 2$$

である。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$

と左辺を変形

‥4 点

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

と左辺を変形

‥7 点

証明完了‥4 点

(2)　25 点

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x+1}$ **までの変形**

‥6 点

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ **の値**

‥6 点

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ **の値**

‥6 点

(答) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\log 2$

答‥7 点

(2)[別解]

(2)[別解]　25 点

n を 2 以上の整数とする。n を 2 で割ったときの商を $p\ (p \geqq 1)$，余りを $r\ (r=0,1)$ とすると，$n=2p+r$ と表せる。r の値によって場合分けをする。

[1]　$r=0$ のとき

(1)より，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k}$$

となる。

[2]　$r=1$ のとき

(1)より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}&=\sum_{k=1}^{2p+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\\&=\sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{1}{2p+1}\\&=\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k}+\frac{1}{2p+1}\end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2]より,

$$\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\leqq\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k}+\frac{1}{2p+1}\qquad\cdots①$$

不等式①‥2 点

となる。ここで，正の整数 k と実数 $x\ (k \leqq x \leqq k+1)$ に対し，

$\dfrac{1}{k+1}\leqq\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{k}$ が成り立つため，

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx\leqq\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\leqq\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$$
$$\therefore\ \frac{1}{k+1}\leqq\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\leqq\frac{1}{k}$$

となる。よって，

$$\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k+1}\leqq\sum_{k=p+1}^{2p}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\leqq\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k}$$

であり，

$$\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=p+2}^{2p+1}\frac{1}{k}$$
$$=\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2p+1}$$

$$\sum_{k=p+1}^{2p}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_{p+1}^{2p+1}\frac{dx}{x}$$
$$=\Big[\log|x|\Big]_{p+1}^{2p+1}$$
$$=\log(2p+1)-\log(p+1)$$
$$=\log\frac{2p+1}{p+1}$$

となるため，

$$\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2p+1}\leqq\log\frac{2p+1}{p+1}\leqq\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k}$$

$$\therefore\log\frac{2p+1}{p+1}\leqq\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{1}{k}\leqq\log\frac{2p+1}{p+1}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2p+1}\quad\cdots②$$

不等式②・・2 点

が成り立つ。以上，①，②より，

$$\log\frac{2p+1}{p+1}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\leqq\log\frac{2p+1}{p+1}+\frac{1}{p+1}$$

左の不等式・・2 点

が成り立つ。また，$n\to\infty$ のとき，$p\to\infty$ となるため，

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{2p+1}{p+1}=\lim_{p\to\infty}\log\left(2-\frac{1}{p+1}\right)$$
$$=\log(2-0)$$
$$=\log 2$$

左辺の極限値

・・6 点

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{2p+1}{p+1}+\frac{1}{p+1}\right)=\lim_{p\to\infty}\left(\log\frac{2p+1}{p+1}+\frac{1}{p+1}\right)$$
$$=\log 2+0$$
$$=\log 2$$

右辺の極限値

・・6 点

となる。よって，はさみうちの原理より，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ は収束し，求める値は，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\log 2$$

である。

(答) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\log 2$

答‥7 点

(3)

(3)　20 点

正の整数 k に対し，

$$\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}=\frac{(-1)^{k+1}}{k}-\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$
$$=\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}$$

部分分数分解‥7 点

が成り立つ。また，(2)より，無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ は $\log 2$ に収束する。よって，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}-\frac{(-1)^{1+1}}{1}$$
$$=\log 2-1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}$ の極限値‥5 点

となるため，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ は収束し，求める値は，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}$$
$$=\log 2+(\log 2-1)$$
$$=2\log 2-1$$

である。

(答) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}=2\log 2-1$

答‥8 点

$\boxed{6}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

複素数 z についての 7 次方程式 $z^7-1=0$ の解は $z=1,\ w,\ w^2,\ \cdots,\ w^6$ である。このことと，

$$z^7-1=(z-1)\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)$$
$$=\left(z-w^0\right)\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)$$

が成り立つことから，6 次方程式 $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$ の解は $z=w,\ w^2,\ \cdots,\ w^6$ である。また，$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ の最高次の係数は 1 であるから，因数定理により

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$$
$$=(z-w)\left(z-w^2\right)\left(z-w^3\right)\left(z-w^4\right)\left(z-w^5\right)\left(z-w^6\right)$$

が得られる。

(証明終)

(1)[別解]

ド・モアブルの定理より

$$w^7=1 \qquad ・・・①$$

が成り立つから，$z=w$ は z に関する方程式 $z^7=1$ の $z=1$ ではない複素数解である。したがって，

$$z^7-1=(z-1)\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)$$

より，$z=w$ は $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$ の解であるから

$$1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6=0 \qquad ・・・②$$

が言える。①，②を用いて $(z-w)\left(z-w^2\right)\cdots\left(z-w^6\right)$ を展開し，$1+z+z^2+\cdots+z^6$ と一致することを示す。$(z-w)\left(z-w^2\right)\cdots\left(z-w^6\right)$ は z の 6 次の整式であるから，z^6 から z までの各項の係数と定数項を求める。z^6 の係数は 1 であり，z^5 の係数は

$$-\left(w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6\right)=1 \quad (\because ②)$$

である。z^4 の係数は

$$w\left(w^2+w^3+w^4+w^5+w^6\right)+w^2\left(w^3+w^4+w^5+w^6\right)$$
$$+w^3\left(w^4+w^5+w^6\right)+w^4\left(w^5+w^6\right)+w^5\cdot w^6$$
$$=w^3+w^4+2w^5+2w^6+3w^7+2w^8+2w^9+w^{10}+w^{11}$$

(1)　15 点

$z^7-1=(z-1)\sum_{l=0}^{6} z^l$

・・5 点

$z=w,\ w^2,\ \cdots,\ w^6$ **は** $1+z+\cdots+z^6=0$ **の解**・・5 点

証明完了・・5 点

(1)[別解]　15 点

$z^7-1=(z-1)\sum_{l=0}^{6} z^l$

・・5 点

①,②・・5 点(完答)

$$= w^3 + w^4 + 2w^5 + 2w^6 + 3 + 2w + 2w^2 + w^3 + w^4 \quad (\because ①)$$
$$= 2\left(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6\right) + 1$$
$$= 1 \quad (\because ②)$$

であり，z^3 の係数は

$$-\left\{w \cdot w^2\left(w^3 + w^4 + w^5 + w^6\right) + w \cdot w^3\left(w^4 + w^5 + w^6\right)\right.$$
$$+ w \cdot w^4\left(w^5 + w^6\right) + w \cdot w^5 \cdot w^6 + w^2 \cdot w^3\left(w^4 + w^5 + w^6\right)$$
$$+ w^2 \cdot w^4\left(w^5 + w^6\right) + w^2 \cdot w^5 \cdot w^6 + w^3 \cdot w^4\left(w^5 + w^6\right)$$
$$\left. + w^3 \cdot w^5 \cdot w^6 + w^4 \cdot w^5 \cdot w^6\right\}$$
$$= -\left(w^6 + w^7 + 2w^8 + 3w^9 + 3w^{10}\right.$$
$$\left. + 3w^{11} + 3w^{12} + 2w^{13} + w^{14} + w^{15}\right)$$
$$= -\left(w^6 + 1 + 2w + 3w^2 + 3w^3 + 3w^4 + 3w^5 + 2w^6 + 1 + w\right)$$
$$(\because ①)$$
$$= -3\left(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6\right) + 1$$
$$= 1 \quad (\because ②)$$

であり，z^2 の係数は

$$w \cdot w^2 \cdot w^3\left(w^4 + w^5 + w^6\right) + w \cdot w^2 \cdot w^4\left(w^5 + w^6\right)$$
$$+ w \cdot w^2 \cdot w^5 \cdot w^6 + w \cdot w^3 \cdot w^4\left(w^5 + w^6\right) + w \cdot w^3 \cdot w^5 \cdot w^6$$
$$+ w \cdot w^4 \cdot w^5 \cdot w^6 + w^2 \cdot w^3 \cdot w^4\left(w^5 + w^6\right) + w^2 \cdot w^3 \cdot w^5 \cdot w^6$$
$$+ w^2 \cdot w^4 \cdot w^5 \cdot w^6 + w^3 \cdot w^4 \cdot w^5 \cdot w^6$$
$$= w^{10} + w^{11} + 2w^{12} + 2w^{13} + 3w^{14} + 2w^{15} + 2w^{16} + w^{17} + w^{18}$$
$$= w^3 + w^4 + 2w^5 + 2w^6 + 3 + 2w + 2w^2 + w^3 + w^4 \quad (\because ①)$$
$$= 2\left(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6\right) + 1$$
$$= 1 \quad (\because ②)$$

であり，z の係数は

$$-\left(w \cdot w^2 \cdot w^3 \cdot w^4 \cdot w^5 + w \cdot w^2 \cdot w^3 \cdot w^4 \cdot w^6\right.$$
$$+ w \cdot w^2 \cdot w^3 \cdot w^5 \cdot w^6 + w \cdot w^2 \cdot w^4 \cdot w^5 \cdot w^6$$
$$\left. + w \cdot w^3 \cdot w^4 \cdot w^5 \cdot w^6 + w^2 \cdot w^3 \cdot w^4 \cdot w^5 \cdot w^6\right)$$
$$= -w^{14}\left(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6\right) + w^{14}$$
$$= -\left(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6\right) + 1 \quad (\because ①)$$
$$= 1 \quad (\because ②)$$

であり，定数項は

$$w \cdot w^2 \cdot w^3 \cdot w^4 \cdot w^5 \cdot w^6 = w^{21} = 1 \quad (\because ①)$$

である。したがって，

$$(z-w)(z-w^2)(z-w^3)(z-w^4)(z-w^5)(z-w^6)$$
$$=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$$

が言える。

(証明終)

証明完了・・5 点

(2)

(2)　20 点

正七角形 $\mathrm{PA_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ は，複素数平面上で

$\mathrm{P}(1)$, $\mathrm{A}_k(w^k)$ $(k=1, 2, \cdots, 6)$ とおける。このとき，

$$\mathrm{PA}_k=|1-w^k|$$

$\mathrm{PA}_k=|1-w^k|$ ・・10 点

であるから，(1)の恒等式に $z=1$ を代入した式を利用すると，

$$\begin{aligned}L&=\mathrm{PA_1}\cdot\mathrm{PA_2}\cdot\mathrm{PA_3}\cdot\mathrm{PA_4}\cdot\mathrm{PA_5}\cdot\mathrm{PA_6}\\&=|1-w||1-w^2||1-w^3||1-w^4||1-w^5||1-w^6|\\&=|(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)(1-w^5)(1-w^6)|\\&=|1+1+1^2+1^3+1^4+1^5+1^6|\\&=7\end{aligned}$$

(1)の利用・・5 点

となる。

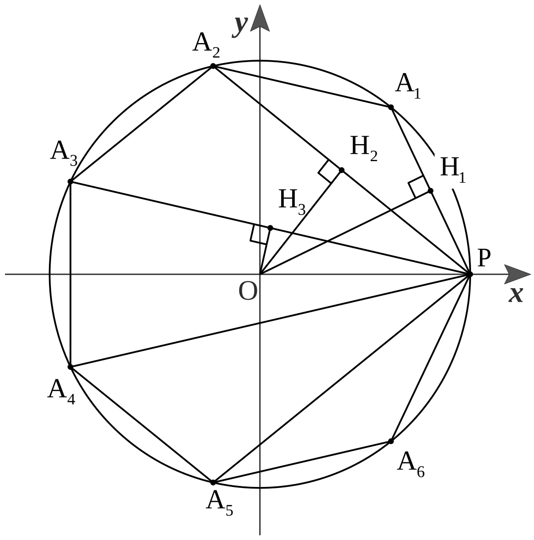
(証明終)

証明完了・・5 点

(3)

(3)　25 点

(2)と同様に正七角形を複素数平面上におく。



$m=1, 2, 3$ のとき，$\triangle\mathrm{POA}_m$ は $\mathrm{OP}=\mathrm{OA}_m=1$, $\angle\mathrm{POA}_m=\dfrac{2m}{7}\pi$ を満たす二等辺三角形である。よって，線分 PA_m の中点を H_m とおくと，$\angle\mathrm{PH}_m\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{2}$ となるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{PA}_m &= 2\mathrm{PH}_m \\ &= 2\mathrm{OP}\sin\frac{\angle \mathrm{POA}_m}{2} \\ &= 2\sin\frac{m}{7}\pi \end{aligned}$$

$\mathrm{PA}_m = 2\sin\frac{m}{7}\pi$

・・5 点

となる。実軸に関する対称性より，$\mathrm{PA}_m = \mathrm{PA}_{7-m}$ であること踏まえると，

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{PA}_1 \cdot \mathrm{PA}_2 \cdot \mathrm{PA}_3 \cdot \mathrm{PA}_4 \cdot \mathrm{PA}_5 \cdot \mathrm{PA}_6 \\ &= (\mathrm{PA}_1 \cdot \mathrm{PA}_2 \cdot \mathrm{PA}_3)^2 \\ &= \left(2\sin\frac{\pi}{7} \cdot 2\sin\frac{2}{7}\pi \cdot 2\sin\frac{3}{7}\pi\right)^2 \\ &= 64\left(\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi\right)^2 \end{aligned}$$

$L = 64\left(\sin\frac{\pi}{7}\right.$

$\left.\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi\right)^2$

・・10 点

となるから, (2)の結果と合わせて

$$64\left(\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi\right)^2 = 7$$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{8} \quad \left(\because \sin\frac{m}{7}\pi > 0\right)$$

を得る。

(答) $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{8}$

答・・10 点

(3)[別解]

(3)［別解］　25 点

(2)と同様に正七角形を複素数平面上におくと，$k = 1, 2, \cdots, 6$ のとき，線分 PA_k の長さは,

$$\begin{aligned} (\mathrm{PA}_k)^2 &= |1 - w^k|^2 \\ &= \left|1 - \left(\cos\frac{2k}{7}\pi + i\sin\frac{2k}{7}\pi\right)\right|^2 \\ &= \left|\left(1 - \cos\frac{2k}{7}\pi\right) - i\sin\frac{2k}{7}\pi\right|^2 \\ &= \left(1 - \cos\frac{2k}{7}\pi\right)^2 + \sin^2\frac{2k}{7}\pi \\ &= \left(\sin^2\frac{2k}{7}\pi + \cos^2\frac{2k}{7}\pi\right) + 1 - 2\cos\frac{2k}{7}\pi \\ &= 1 + 1 - 2\left(1 - 2\sin^2\frac{k}{7}\pi\right) \\ &= 4\sin^2\frac{k}{7}\pi \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{PA}_k = 2\sin\frac{k}{7}\pi \left(\because \sin\frac{k}{7}\pi > 0\right)$$

となるから，L は，

$$L = 2\sin\frac{\pi}{7}\cdot 2\sin\frac{2}{7}\pi\cdot 2\sin\frac{3}{7}\pi$$

$$\cdot 2\sin\frac{4}{7}\pi\cdot 2\sin\frac{5}{7}\pi\cdot 2\sin\frac{6}{7}\pi$$

$$= 64\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi$$

$$\sin\left(\pi-\frac{3}{7}\pi\right)\sin\left(\pi-\frac{2}{7}\pi\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= 64\left(\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi\right)^2$$

とも表せる。このことと(2)の結果より，

$$64\left(\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi\right)^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{8}$$

$$\left(\because \sin\frac{\pi}{7} > 0,\ \sin\frac{2}{7}\pi > 0,\ \sin\frac{3}{7}\pi > 0\right)$$

となる。

(答)　$\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{8}$

$\mathrm{PA}_k = 2\sin\frac{k}{7}\pi$

・・5 点

$L = 64\left(\sin\frac{\pi}{7}\right.$

$\left.\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi\right)^2$

・・10 点

答・・10 点

$\boxed{7}$ （６０点）

【解答・採点基準】

サイコロを m 個振り $(m=1, 2, 3)$，出た目の和が 10 となる事象を A_m，出た目がすべて 3 以下となる事象を B_m，それ以外の事象を C_m とする。

(1)

n 回目の操作でサイコロを 3 個振るのは，$n-1$ 回目までの操作すべてで事象 C_3 となる場合である。サイコロを 3 個振ったときの目の組み合わせは 6^3 通りあり，これらは同様に確からしい。事象 A_3 となる目の組み合わせは，

$$\{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 2, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 4\}, \{3, 3, 4\}$$

であり，組み合わせの総数は $3\cdot 3!+3\cdot {}_3\mathrm{C}_1=27$ 通りである。また，事象 B_3 となる目の組み合わせは $3^3=27$ 通り存在する。事象 A_3, B_3 は互いに排反であるから，

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1-\frac{27}{6^3}-\frac{27}{6^3}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

を得る。

（答） $p_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

(1)[別解]

サイコロを 3 個振る事象を P，サイコロを 2 個振る事象を Q，サイコロを 1 個振る事象を R とする。このとき，この操作における状態遷移図は以下のようになる。

(1)　20 点

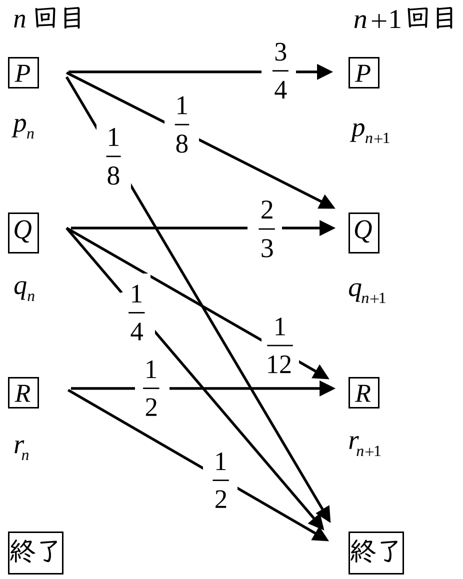
$n-1$ 回目まですべて事象 C_3 ‥5 点

事象 A_3 となる目の組み合わせの数 ‥5 点

事象 B_3 となる目の組み合わせの数 ‥5 点

答‥5 点

(1)[別解]　20 点



状態遷移図‥5 点

・遷移確率は不問

$P \to P$ の遷移確率

$\frac{3}{4}$‥10 点

上図より，

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{3}{4}p_n \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{8}p_n + \dfrac{2}{3}q_n \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{12}q_n + \dfrac{1}{2}r_n \end{cases}$$

となる。 $p_{n+1} = \frac{3}{4}p_n$, $p_1 = 1$ より， $p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ となる。

(答) $p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

答‥5 点

(2)

(2)　20 点

サイコロを 2 個振ったときの目の組み合わせは 6^2 通りあり，これらは同様に確からしい。事象 A_2 となる目の組み合わせは

$\{4, 6\}, \{5, 5\}$

であり，組み合わせの総数は $2+1=3$ 通りである。また，事象 B_2 となる目の組み合わせは $3^2 = 9$ 通り存在する。事象 A_2, B_2 は互いに排反であるから，事象 C_2 となる確率は

事象 C_2 となる確率‥5 点

$$1 - \frac{3}{6^2} - \frac{9}{6^2} = \frac{2}{3}$$

となる。ここで，$n \geqq 2$ のとき，n 回目の操作でサイコロを 2 個振るのは，1 回目から $n-1$ 回目の操作のいずれかで事象 A_3 となり，

n 回目の操作でサイコロを 2 個振るための条件‥5 点

その後の $n-1$ 回目までの操作すべてで事象 C_2 となる場合である。このうち，k 回目（k は $1 \leqq k \leqq n-1$ を満たす整数)の操作で事象 A_3 となる場合の確率は，

$$\left(p_k \cdot \frac{27}{6^3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-k} = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-k}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-k} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{(n-2)-(k-1)} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{9}{8}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{\left\{ \left(\frac{9}{8}\right)^{n-1} - 1 \right\}}{\frac{9}{8} - 1} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

となる。また，$n=1$ のとき $q_1 = 0$ より，$n=1$ のときもこれを満たす。よって，すべての正の整数 n について $q_n = \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$ である。

（答） $q_n = \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

(2)[別解]

$p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ より，

$$q_{n+1} = \frac{2}{3} q_n + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow q_{n+1} - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \frac{2}{3}\left\{ q_n - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n} \right\}$$

となる。よって，数列 $\left\{ q_n - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\}$ は初項 $q_1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$ $(\because q_1 = 0)$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから，

題意を満たすもののうち，k 回目の操作で事象 A_3 となるものの確率

‥5 点

答‥5 点

(2)[別解]　20 点

$Q \to Q$ の遷移確率

$\frac{2}{3}$ ‥5 点

$P \to Q$ の遷移確率

$\frac{1}{8}$ ‥5 点

$q_{n+1} = \frac{2}{3} q_n + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

‥5 点

$$q_n-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\therefore q_n=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

となる。

(答) $q_n=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

答‥5 点

(3)

(3)　20 点

サイコロを1個振ったときの目は6通りあり，これらは同様に確からしい。事象 A_1 となる目は存在せず，事象 B_1 となる目は3通りである。よって，事象 C_1 となる確率は

$$1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

事象 C_1 となる確率‥5 点

となる。ここで，$n\geqq 2$ のとき，n 回目の操作でサイコロを1個振るのは，1回目から $n-1$ 回目の操作のいずれかで事象 A_2 となり，その後の $n-1$ 回目までの操作すべてで事象 C_1 となる場合である。このうち，l 回目(l は $1\leqq l\leqq n-1$ を満たす整数)の操作で事象 A_2 となる確率は

n 回目の操作でサイコロを1個振るための条件‥5 点

題意を満たすもののうち，l 回目の操作で事象 A_2 となるものの確率‥5 点

$$\left(q_l\cdot\frac{3}{6^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-l}=\frac{1}{8}\cdot\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{l-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{l-1}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-l}$$

となる。したがって，

$$r_n=\sum_{l=1}^{n-1}\left[\frac{1}{8}\cdot\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{l-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{l-1}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-l}\right]$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\sum_{l=1}^{n-1}\left[\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{l-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{l-1}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)-(l-1)}\right]$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\sum_{l=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{l-1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{l-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}-\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-1}{\frac{4}{3}-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\left\{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+1\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

となる。また，$n=1$ のとき $r_1=0$ より，$n=1$ のときもこれを満たす。よってすべての正の整数 n について

$r_n=\frac{1}{4}\left\{2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ である。

(答) $r_n=\frac{1}{4}\left\{2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

答‥5 点

(3)[別解]

$q_n=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$ より，

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$
$$\Leftrightarrow r_{n+1}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{9}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{r_n-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{9}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}$$

となる。よって，数列 $\left\{r_n-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{9}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ は初項

$r_1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{9}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$ $(\because r_1=0)$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，

(3)[別解]　20 点

$R\to R$ の遷移確率

$\frac{1}{2}$ ‥5 点

$Q\to R$ の遷移確率

$\frac{1}{12}$ ‥5 点

$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n+$

$\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

‥5 点

$$r_n - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{9}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore r_n = \frac{1}{4}\left\{2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

となる。

(答) $r_n = \frac{1}{4}\left\{2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

答・・5 点

8 （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

$a_n+p(b_n+c_n)$ について式変形すると，

$$a_n+p(b_n+c_n)$$
$$=\frac{(n+1)a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}}{3}$$
$$+p\left\{\frac{a_{n-1}+(n+1)b_{n-1}+c_{n-1}}{3}+\frac{a_{n-1}+b_{n-1}+(n+1)c_{n-1}}{3}\right\}$$
$$=\frac{n+1+2p}{3}a_{n-1}+\frac{1+pn+2p}{3}(b_{n-1}+c_{n-1}) \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。ここで，$a_n+p(b_n+c_n)=(qn+r)\{a_{n-1}+p(b_{n-1}+c_{n-1})\}$ が成り立つには，$a_{n-1},\ b_{n-1}+c_{n-1}$ の係数の比について

$$1:p=\frac{n+1+2p}{3}:\frac{1+pn+2p}{3}$$

となることが必要である。これを式変形すると

$$1:p=\frac{n+1+2p}{3}:\frac{1+pn+2p}{3}$$
$$\Leftrightarrow p\cdot\frac{n+1+2p}{3}=\frac{1+pn+2p}{3}$$
$$\Leftrightarrow 2p^2-p-1=0$$
$$\Leftrightarrow (p-1)(2p+1)=0$$
$$\therefore p=1,\ -\frac{1}{2}$$

となる。$p=1$ のとき，①より

$$a_n+(b_n+c_n)=\frac{n+3}{3}\{a_{n-1}+(b_{n-1}+c_{n-1})\} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。これより，$(p,\ q,\ r)=\left(1,\ \frac{1}{3},\ 1\right)$ で条件を満たす。また，

$p=-\frac{1}{2}$ のとき，①より

$$a_n-\frac{1}{2}(b_n+c_n)=\frac{n}{3}\left\{a_{n-1}-\frac{1}{2}(b_{n-1}+c_{n-1})\right\} \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

(1)　20 点

①式を導いて
･･5 点

係数の比から $p,\ n$ についての関係式を導いて･･5 点

$p=1,\ -\frac{1}{2}$ ･･4 点

$(p,\ q,\ r)=\left(1,\ \frac{1}{3},\ 1\right)$
･･3 点

となる。これより，$(p,q,r)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3},0\right)$で条件を満たす。したがって，求める定数$(p,q,r)$の組は，$(p,q,r)=\left(1,\frac{1}{3},1\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3},0\right)$である。 (答) $(p,q,r)=\left(1,\frac{1}{3},1\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3},0\right)$	(p,q,r) $=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3},0\right)$ ‥3 点
(2) ②の両辺を$(n+3)!$で割ると $$\frac{a_n+b_n+c_n}{(n+3)!}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}}{(n+2)!}$$ となる。これより，数列$\left\{\frac{a_n+b_n+c_n}{(n+3)!}\right\}$は初項$\frac{0+1+2}{3!}=\frac{1}{2}$，公比$\frac{1}{3}$の等比数列である。したがって $$\frac{a_n+b_n+c_n}{(n+3)!}=\frac{1}{2\cdot 3^n}$$ $$\Leftrightarrow a_n+b_n+c_n=\frac{(n+3)!}{2\cdot 3^n}$$ となる。 (答) $a_n+b_n+c_n=\frac{(n+3)!}{2\cdot 3^n}$	(2)　10 点 等比数列$\left\{\frac{a_n+b_n+c_n}{(n+3)!}\right\}$の公比を求めて‥5 点 答‥5 点
(2)[別解] ②より，帰納的に $$\begin{aligned}a_n+b_n+c_n&=\frac{n+3}{3}(a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1})\\&=\frac{n+3}{3}\cdot\frac{n+2}{3}\cdots\cdots\frac{4}{3}(a_0+b_0+c_0)\\&=\frac{(n+3)!}{3^n}\cdot\frac{3}{3!}\\&=\frac{(n+3)!}{2\cdot 3^n}\end{aligned}$$ となる。 (答) $a_n+b_n+c_n=\frac{(n+3)!}{2\cdot 3^n}$	(2)[別解]　10 点 帰納的に考えて左式 2 行目を導いて‥5 点 答‥5 点
(3) ③の両辺を$n!$で割ると	(3)　15 点

$$\frac{1}{n!}\cdot\left\{a_n-\frac{1}{2}(b_n+c_n)\right\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left\{a_{n-1}-\frac{1}{2}(b_{n-1}+c_{n-1})\right\}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2a_n-b_n-c_n}{n!}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a_{n-1}-b_{n-1}-c_{n-1}}{(n-1)!}$$

となる。これより，数列$\left\{\dfrac{2a_n-b_n-c_n}{n!}\right\}$は初項$\dfrac{0-1-2}{0!}=-3$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列である。したがって

$$\frac{2a_n-b_n-c_n}{n!}=-\frac{3}{3^n}$$
$$\Leftrightarrow 2a_n-b_n-c_n=-\frac{3\cdot n!}{3^n}$$

となる。よって，これと(2)より

$$(a_n+b_n+c_n)+(2a_n-b_n-c_n)=\frac{(n+3)!}{2\cdot 3^n}-\frac{3\cdot n!}{3^n}$$
$$\Leftrightarrow 3a_n=\frac{(n+3)!-6\cdot n!}{2\cdot 3^n}$$
$$\therefore a_n=\frac{(n+3)!-6\cdot n!}{2\cdot 3^{n+1}}$$

となる。

(答) $a_n=\dfrac{(n+3)!-6\cdot n!}{2\cdot 3^{n+1}}$

(3)[別解] ($2a_n-b_n-c_n=-\dfrac{3\cdot n!}{3^n}$ の導出)

③より，帰納的に

$$a_n-\frac{1}{2}(b_n+c_n)=\frac{n}{3}\left\{a_{n-1}-\frac{1}{2}(b_{n-1}+c_{n-1})\right\}$$
$$=\frac{n}{3}\cdot\frac{n-1}{3}\cdots\cdots\frac{1}{3}\left\{a_0-\frac{1}{2}(b_0+c_0)\right\}$$
$$=\frac{n!}{3^n}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

となる。よって，$2a_n-b_n-c_n=-\dfrac{3\cdot n!}{3^n}$ となる。

(以下，本解と共通)

(4)

(2), (3)より

等比数列$\left\{\dfrac{2a_n-b_n-c_n}{n!}\right\}$の公比を求めて‥5 点

$2a_n-b_n-c_n$

$=-\dfrac{3\cdot n!}{3^n}$ **‥5 点**

答‥5 点

(3)[別解]　15 点

帰納的に考えて左式 2 行目を導いて‥5 点

$2a_n-b_n-c_n$

$=-\dfrac{3\cdot n!}{3^n}$ **‥5 点**

共通部分‥5 点

(4)　15 点

$$b_n+c_n=(a_n+b_n+c_n)-a_n$$
$$=\frac{(n+3)!}{2\cdot 3^n}-\frac{(n+3)!-6\cdot n!}{2\cdot 3^{n+1}}$$
$$=\frac{(n+3)!}{3^{n+1}}+\frac{n!}{3^n} \quad \cdots ④$$

b_n+c_n
$=\frac{(n+3)!}{3^{n+1}}+\frac{n!}{3^n}$
‥5 点

となる。また，与えられた漸化式より

$$b_n-c_n=\frac{n}{3}(b_{n-1}-c_{n-1})$$

となる。(3)と同様に，両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{b_n-c_n}{n!}=\frac{1}{3}\cdot\frac{b_{n-1}-c_{n-1}}{(n-1)!}$$

となり，数列 $\left\{\frac{b_n-c_n}{n!}\right\}$ は初項 $\frac{1-2}{0!}=-1$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。したがって

$$\frac{b_n-c_n}{n!}=-\frac{1}{3^n}$$

$$\Leftrightarrow b_n-c_n=-\frac{n!}{3^n} \quad \cdots ⑤$$

$b_n-c_n=-\frac{n!}{3^n}$ ‥5 点

となる。よって，④，⑤より

$$(b_n+c_n)+(b_n-c_n)=\frac{(n+3)!}{3^{n+1}}$$
$$\Leftrightarrow 2b_n=\frac{(n+3)!}{3^{n+1}}$$
$$\therefore b_n=\frac{(n+3)!}{2\cdot 3^{n+1}}$$

となる。

(答) $b_n=\frac{(n+3)!}{2\cdot 3^{n+1}}$

答‥5 点

(4)[別解]

(4)［別解］　15 点

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の漸化式の対称性より，

$$b_n-\frac{1}{2}(c_n+a_n)=\frac{n}{3}\left\{b_{n-1}-\frac{1}{2}(c_{n-1}+a_{n-1})\right\} \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

漸化式の対称性から左式を導いて
‥5 点

となる。(3)と同様に，両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{2b_n - c_n - a_n}{n!} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2b_{n-1} - c_{n-1} - a_{n-1}}{(n-1)!}$$

となり，数列$\left\{ \dfrac{2b_n - c_n - a_n}{n!} \right\}$は初項$\dfrac{2-2-0}{0!} = 0$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列である。したがって

$$\frac{2b_n - c_n - a_n}{n!} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2b_n - c_n - a_n = 0$$

$2b_n - c_n - a_n = 0$

・・5 点

となる。よって，これと(2)より

$$(b_n + c_n + a_n) + 2b_n - c_n - a_n = \frac{(n+3)!}{2 \cdot 3^n}$$
$$\Leftrightarrow 3b_n = \frac{(n+3)!}{2 \cdot 3^n}$$
$$\therefore b_n = \frac{(n+3)!}{2 \cdot 3^{n+1}}$$

となる。

(答) $b_n = \dfrac{(n+3)!}{2 \cdot 3^{n+1}}$

答・・5 点

$\boxed{9}$ （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

△OMN の内部(周上を除く)を D とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{x,\,y}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{x}{m}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{y}{n}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

となるため，斜格子点 $\mathrm{P}_{x,\,y}$ が D に存在する必要十分条件は，

$$\frac{x}{m}>0\ \text{かつ}\ \frac{y}{n}>0\ \text{かつ}\ \frac{x}{m}+\frac{y}{n}<1$$

$$\therefore x>0\ \text{かつ}\ y>0\ \text{かつ}\ \frac{x}{m}+\frac{y}{n}<1\ (\because m>0,\ n>0)\quad\cdots①$$

である。したがって，$L\neq0$ のとき，①を満たす整数の組 $(x,\ y)$ が存在するため，それを $(x,\ y)=(x',\ y')$ とおくと，$x'\geqq1,\ y'\geqq1$ より，

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leqq\frac{x'}{m}+\frac{y'}{n}<1\ (\because m>0,\ n>0)$$

が成立し，$(x,\ y)=(1,\ 1)$ は①を満たす。したがって，$L\neq0$ ならば，点 $\mathrm{P}_{1,\,1}$ は D に存在する。

(証明終)

(2)

(1)より，$L=1$ となるための必要十分条件は，点 $\mathrm{P}_{1,\,1}$ のみが D に存在することである。また，①より，点 $\mathrm{P}_{1,\,1}$ が D に存在する必要十分条件は，

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1\quad\cdots②$$

である。次に，$(x,\ y)\neq(1,\ 1)$ となる点 $\mathrm{P}_{x,\,y}$ が D に存在しない必要十分条件を求める。$x\leqq0$ または $y\leqq0$ である点 $\mathrm{P}_{x,\,y}$ は①を満たさないため，$x>0$ かつ $y>0$ のときを考える。①より，点 $\mathrm{P}_{2,\,1}$, $\mathrm{P}_{1,\,2}$ が D に存在しない必要十分条件は，それぞれ，

$$\frac{2}{m}+\frac{1}{n}\geqq1\quad\cdots③$$

---

(1)　15 点

$\frac{x}{m}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{y}{n}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

‥5 点

$\mathrm{P}_{x,\,y}$ が D に存在することと①は同値であることを述べて‥5 点

証明完了‥5 点

(2)　27 点

$L=1$ と点 $\mathrm{P}_{1,\,1}$ のみが D に存在することとは同値であることを述べて‥3 点

$$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\geqq 1 \qquad \cdots④$$

である。ここで，$x>0$ かつ $y>0$ かつ $(x,\ y)\neq(1,\ 1)$ のとき，$x,\ y$ は整数であるため，

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}\geqq\frac{2}{m}+\frac{1}{n} \quad \text{または} \quad \frac{x}{m}+\frac{y}{n}\geqq\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$$

が成り立つ。よって，③かつ④ならば $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}\geqq 1$ となり，点 $P_{x,\ y}$ は D に存在しない。したがって，$L=1$ となるための必要十分条件は②かつ③かつ④である。ここで，m と n の対称性より，$m\leqq n$ の場合を考える。

[1] $m=1$ のとき

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{m}=1$$

となり，②を満たさない。

[2] $m=2$ のとき

$n\geqq 2$ であり，

$$② \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n>2$$

$$③ \Leftrightarrow \frac{1}{n}\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow n>0$$

$$④ \Leftrightarrow \frac{2}{n}\geqq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n\leqq 4$$

となるため，$n=3,\ 4$ である。

[3] $m=3$ のとき

$n\geqq 3$ であり，

$$② \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{3}{2}$$

点 $P_{2,\ 1}$, $P_{1,\ 2}$ が D に存在しないならば $(x,\ y)\neq(1,\ 1)$ のとき点 $P_{x,\ y}$ は D に存在しないことを示して‥6 点

・根拠が不十分な場合は 3 点

$L=1$ と「②かつ③かつ④」は同値であることを示して‥3 点

③$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow n \leqq 3$

④$\Leftrightarrow \dfrac{2}{n} \geqq \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow n \leqq 3$

となるため，$n=3$である。

[4]　$m \geqq 4$のとき

$4 \leqq m \leqq n$より，

$$\frac{1}{m}+\frac{2}{n} \leqq \frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}<1$$

となり，④を満たさない。

以上, [1]～[4]より，$m \leqq n$のとき，②かつ③かつ④を満たす正の整数の組は$(m,\ n)=(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3)$である。したがって，$m$と$n$の対称性より，求める正の整数の組は，

$$(m,\ n)=(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$$

となる。

(答)　$(m,\ n)=(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$

$(m,\ n)=(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 2)$ のとき条件を満たすことを示して‥10点(各2点×5)
上記以外の組は条件を満たさないことを示して‥5点

(3)

(3)　18点

$\triangle$OMNの成立条件より，

$$|\mathrm{OM}-\mathrm{ON}|<\mathrm{MN}<\mathrm{OM}+\mathrm{ON}$$
$$\Leftrightarrow |m-n|<\mathrm{MN}<m+n$$

$\mathrm{MN}<m+n$‥3点

である。また，$\triangle$OMNにおいて余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\mathrm{OM}^2+\mathrm{ON}^2-\mathrm{MN}^2}{2\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}}$$
$$=\frac{m^2+n^2-\mathrm{MN}^2}{2mn}$$

左式‥3点

であり，MNは整数であるため，各$(m,\ n)$に対し，$\cos\angle\mathrm{AOB}$は$\mathrm{MN}=m+n-1$のとき，最小値

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{m^2+n^2-(m+n-1)^2}{2mn}$$
$$=\frac{m^2+n^2-(m^2+n^2+1-2m-2n+2mn)}{2mn}$$
$$=-\frac{1-2m-2n+2mn}{2mn}$$

各$(m,\ n)$に対し$\cos\angle\mathrm{AOB}$の最小値‥3点

をとる。ここで，$f(m,\ n)=-\dfrac{1-2m-2n+2mn}{2mn}$ とおくと，

$f(n,\ m)=f(m,\ n)$ であり，

$$f(2,\ 3)=-\frac{1}{4},\ f(2,\ 4)=-\frac{5}{16},\ f(3,\ 3)=-\frac{7}{18}$$

となる。以上より，求める最小値は $\cos\angle\mathrm{AOB}=-\dfrac{7}{18}$ である。

(答) $-\dfrac{7}{18}$

$f(2,\ 3)$，$f(2,\ 4)$，
$f(3,\ 3)$
・・6 点(各 2 点×3)

答・・3 点