２０２４年度　第１回千葉大学本番レベル模試・数学

解答・採点基準

全９問

Ⅰ　（５０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

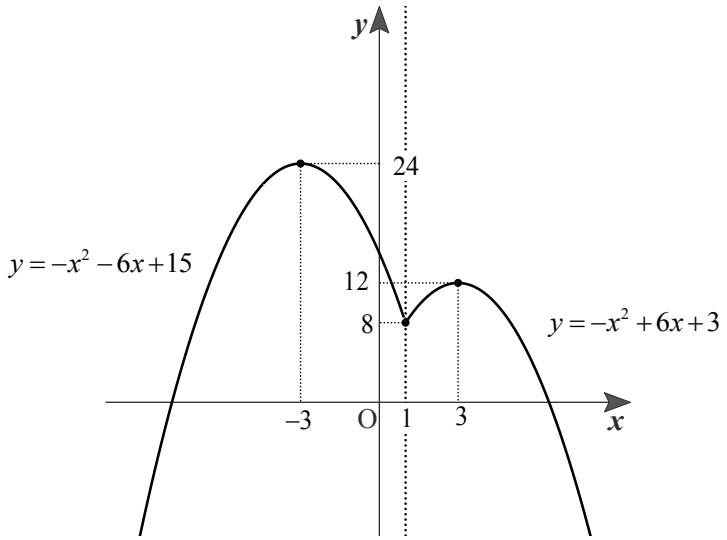
$$f(x)=-x^2+6|x-1|+9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-x^2+6(x-1)+9 \ (x \geqq 1) \\ f(x)=-x^2-6(x-1)+9 \ (x<1) \end{cases} \text{(A)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-x^2+6x+3 \ (x \geqq 1) \\ f(x)=-x^2-6x+15 \ (x<1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-(x-3)^2+12 \ (x \geqq 1) \\ f(x)=-(x+3)^2+24 \ (x<1) \end{cases}$$

となるため，$y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



(B)

(答) 前図

(1)　15 点 (A)(B)

(A)絶対値を外して‥5 点

・式整理の有無は不問

(B)答‥10 点

・放物線が変化する点 $(1, 8)$ と 2 つの放物線の頂点 $(-3, 24)$, $(3, 12)$ が明記されていない場合，各 1 点減点(最大 3 点減点)

(2)

(1)のグラフより，y 軸に平行な直線は $y=f(x)$ と 2 点で接さないため，実数 m, n を用いて，求める接線の方程式を $y=mx+n$ とおく。1 つの放物線は 1 本の直線と多くとも 1 点でしか接することはないため，$y=f(x)$ と $y=mx+n$ が 2 点で接するとき，$x>1$ で 1 点，$x<1$ で 1 点接することとなる。(A)

[1] $x>1$ で $y=f(x)$ と $y=mx+n$ が接するとき

$$-x^2+6x+3=mx+n$$
$$\Leftrightarrow x^2+(m-6)x+(n-3)=0$$

が $x>1$ で重解をもてばよい。したがって，この方程式の判別式を D_1 とすると，

$$D_1=0$$
$$\Leftrightarrow (m-6)^2-4(n-3)=0$$
$$\Leftrightarrow m^2-12m-4n+48=0 \text{ (B)} \quad \cdots ①$$

となる。さらに，二次関数の軸に注目すると，

$$-\frac{m-6}{2}>1$$
$$\Leftrightarrow m<4 \text{ (C)} \quad \cdots ②$$

となればよい。

[2] $x<1$ で $y=f(x)$ と $y=mx+n$ が接するとき

$$-x^2-6x+15=mx+n$$
$$\Leftrightarrow x^2+(m+6)x+(n-15)=0$$

が $x<1$ で重解をもてばよい。したがって，この方程式の判別式を D_2 とすると，[1]と同様に，

$$D_2=0$$
$$\Leftrightarrow (m+6)^2-4(n-15)=0$$
$$\Leftrightarrow m^2+12m-4n+96=0 \text{ (D)} \quad \cdots ③$$

かつ

$$-\frac{m+6}{2}<1$$
$$\Leftrightarrow m>-8 \text{ (E)} \quad \cdots ④$$

となればよい。

以上より，m, n が題意を満たすには①，②，③，④をすべて満たせばよい。②，④より，

$$-8<m<4$$

(2)　35 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(A)接点が $x>1$ と $x<1$ に 1 つずつもつことを述べて‥5 点

(B)①‥5 点

(C)②‥5 点

・$y=-x^2+6x+3$ と $y=mx+n$ が $x>1$ で重解をもつための条件を m, n を用いて表していれば(B)，(C)の点を与える

(D)③‥5 点

(E)④‥5 点

・$y=-x^2-6x+15$ と $y=mx+n$ が $x<1$ で重解をもつための条件を m, n を用いて表していれば(D)，(E)の点を与える

である。また，③-①より，

$$24m+48=0$$
$$\therefore m=-2$$

となり，これは $-8<m<4$ を満たす。$m=-2$ を①に代入すると，

$$n=19$$

となる。以上より，求める接線の方程式は，

$$y=-2x+19$$

となる。

(答) $y=-2x+19$ (F)

(F)答‥10 点

(2)[別解 1]

1 つの放物線は 1 本の直線と多くとも 1 点でしか接することはないため，$y=f(x)$ と求める接線が 2 点で接するとき，$x>1$ で 1 点，$x<1$ で 1 点接することとなる。(A)ここで，$g(x)=-x^2+6x+3$，$h(x)=-x^2-6x+15$ とする。また，b, c を $b>1, c<1$ を満たす実数とし，求める接線と $y=g(x)$ との接点を $(b, g(b))$，$y=h(x)$ との接点を $(c, h(c))$ とする。

このとき，$(b, g(b))$ における $y=g(x)$ の接線は

$$y=g'(b)(x-b)+g(b)$$
$$\Leftrightarrow y=g'(b)x+g(b)-bg'(b)$$

と表せる。また，$(c, h(c))$ における $y=h(x)$ の接線は

$$y=h'(c)(x-c)+h(c)$$
$$\Leftrightarrow y=h'(c)x+h(c)-ch'(c)$$

と表せる。これらが一致するため，

$$\begin{cases} g'(b)=h'(c) \\ g(b)-bg'(b)=h(c)-ch'(c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b+6=-2c-6 \\ (-b^2+6b+3)-b(-2b+6)=(-c^2-6c+15)-c(-2c-6) \end{cases} \text{(G)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=b-6 \\ b^2-c^2-12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=b-6 \\ b^2-(b-6)^2-12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=b-6 \\ 12b-48=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ c=-2 \end{cases} \text{(H)}$$

となり，これは $b>1, c<1$ を満たす。(I)よって，接線の方程式は，

(2)[別解 1]　35 点 (A)(G)(H)(I)(F)

(A)接点が $x>1$ と $x<1$ に 1 つずつもつことを述べて‥5 点

(G) b, c が満たす条件式を立てて‥10 点(完答)

(H) $(b, c)=(4, -2)$ ‥7 点(完答)

(I)十分条件の確認‥3 点

$$y=g'(4)(x-4)+g(4)$$
$$\Leftrightarrow y=-2(x-4)+11$$
$$\Leftrightarrow y=-2x+19$$

となる。

(答) $y=-2x+19$ (F)

(F)答‥10 点

(2)[別解 2]

1 つの放物線は 1 本の直線と多くとも 1 点でしか接することはないため，$y=f(x)$ と求める接線が 2 点で接するとき，$x>1$ で 1 点，$x<1$ で 1 点接することとなる。(A)ここで，$g(x)=-x^2+6x+3$，$h(x)=-x^2-6x+15$ とする。また，b を $b>1$ を満たす実数とし，求める接線と $y=g(x)$ との接点を $(b,\ g(b))$ とする。このとき，$(b,\ g(b))$ における $y=g(x)$ の接線は

$$y=g'(b)(x-b)+g(b)$$
$$\Leftrightarrow y=g'(b)x+g(b)-bg'(b)$$
$$\Leftrightarrow y=(-2b+6)x+b^2+3$$

と表せる。これが $x<1$ で $y=h(x)$ と接するため，

$$-x^2-6x+15=(-2b+6)x+b^2+3$$
$$\Leftrightarrow x^2+(-2b+12)x+b^2-12=0$$

の判別式を D とすると，

$$\begin{cases} b-6<1 \\ \dfrac{D}{4}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b<7 \\ (-b+6)^2-(b^2-12)=0 \end{cases} \text{(J)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b<7 \\ -12b+48=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b=4 \text{ (K)}$$

となる。また，$b>1$ を満たす。(L)よって，接線の方程式は，

$$y=g'(4)(x-4)+g(4)$$
$$\Leftrightarrow y=-2(x-4)+11$$
$$\Leftrightarrow y=-2x+19$$

となる。

(答) $y=-2x+19$ (F)

(2)[別解 2]　35 点 (A)(J)(K)(L)(F)

(A)接点が $x>1$ と $x<1$ に 1 つずつもつことを述べて‥5 点

(J) b が満たす条件式を立てて‥10 点(完答)

(K) $b=4$ ‥7 点

(L)十分条件の確認‥3 点

(F)答‥10 点

2 （５０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

球を2回取り出すとき，球の取り出し方は7通りのみである。この7通りについて，場合分けをして考える。

[1] 白→白と取り出した場合

必ず2点以上になるから，条件を満たさない。(A 1/2)

[2] 赤→白，黒→白と取り出した場合

必ず1点以上になるから，条件を満たさない。(A 2/2)

[3] 赤→黒，黒→赤，白→赤と取り出した場合

必ず0点になる。(B)これらの取り出し方が起こる確率は，

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\ (C)=\frac{1}{3}$$

である。

[4] 白→黒と取り出した場合

2回目のゲームにおけるサイコロの出目が，1回目のゲームにおけるサイコロの出目以上になれば0点になる。(D)したがって，0点になる確率は，

$$\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6+5+4+3+2+1}{6^2}=\frac{7}{72}\ (E)$$

である。

以上，[1]~[4]の事象は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{3}+\frac{7}{72}=\frac{31}{72}$$

となる。

(答) $\frac{31}{72}$ (F)

(1)　20点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(A)[1]，[2]の各場合，サイコロの出目に関わらず必ず1点以上となる
‥3点(各1点×3)
・[3]，[4]のときのみを考えればよいことを述べていれば可

(B)[3]の各場合，サイコロの出目に関わらず必ず0点となる
‥3点(各1点×3)

(C)[3]の各場合が起こる確率
‥6点(各2点×3)

(D)[4]の場合に0点となるサイコロの目の出方について言及‥1点

(E)[4]の場合に0点となる確率
‥2点

(F)答‥5点

(2)

球を3回取り出すとき，球の取り出し方は12通りのみである。この12通りについて，場合分けをして考える。

(2)　30点
(A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)(H)(I)(J)

[1] 黒→白→赤，白→赤→黒，白→黒→赤，白→白→赤と取り出した場合

必ず0点になるため，条件を満たさない。(A 1/2)

[2] 赤→白→白，黒→白→白と取り出した場合

必ず2点以上になるため，条件を満たさない。(A 2/2)

[3] 赤→黒→白，黒→赤→白，白→赤→白と取り出した場合

3回目のゲームにおけるサイコロの出目が1になれば1点になる。(B)したがって，1点になる確率は，

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}\ (C)=\frac{1}{24}$$

である。

[4] 赤→白→黒と取り出した場合

3回目のゲームにおけるサイコロの出目が，2回目のゲームにおけるサイコロの出目より1だけ小さくなれば1点になる。(D)そのようなサイコロの目の出方が起こる確率は，

$$\frac{1+1+1+1+1+0}{6^2}=\frac{5}{36}$$

である。したがって，1点になる確率は，

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{36}=\frac{5}{432}\ (E)$$

である。

[5] 白→黒→白と取り出した場合

2回目のゲーム終了時点での持ち点が0点で，かつ3回目のゲームにおけるサイコロの出目が1であれば1点になる。(F)(1)の[4]より，1点になる確率は，

$$\frac{7}{72}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{864}\ (G)$$

である。

[6] 白→白→黒と取り出した場合

3回目のゲームにおけるサイコロの出目が，1，2回目のゲームにおけるサイコロの出目の和より1だけ小さくなれば1点になる。(H)つまり，1，2回目のゲームにおけるサイコロの出目の和をSとしたとき，Sが7以下で，かつ3回目のゲームにおけるサイコロの出目が$S-1$であれば1点になる。ここで，Sが7以下となる確率は，

$$\frac{6+5+4+3+2+1}{6^2}=\frac{7}{12}$$

(A)[1]，[2]の各場合，サイコロの出目に関わらず必ず1点にはならない‥6点(各1点×6)

・[3]，[4]，[5]，[6]のときのみを考えればよいことを述べていれば可

(B)[3]の各場合に1点となるサイコロの目の出方について言及‥3点(各1点×3)

(C)[3]の各場合に1点となる確率‥6点(各2点×3)

(D)[4]の場合に1点となるサイコロの目の出方について言及‥1点

(E)[4]の場合に1点となる確率‥2点

(F)[5]の場合に1点となるサイコロの目の出方について言及‥1点

(G)[5]の場合に1点となる確率‥2点

(H)[6]の場合に1点となるサイコロの目の出方について言及‥1点

であり，3回目のゲームにおけるサイコロの出目が$S-1$である確率は$\frac{1}{6}$である。したがって，1点になる確率は，

$$\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{864}\text{(I)}$$

である。

以上，[1]~[6]の事象は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{24}+\frac{5}{432}+\frac{7}{864}+\frac{7}{864}=\frac{5}{72}$$

である。

(答) $\frac{5}{72}$ (J)

(I)[6]の場合に1点となる確率‥2点

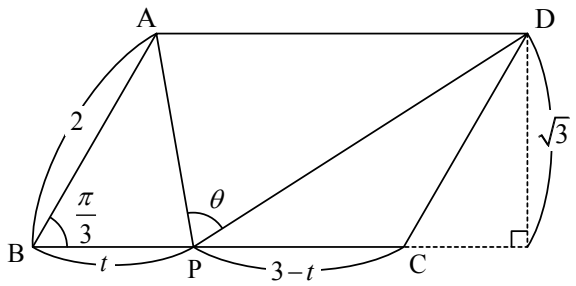
(J)答‥6点

3 （５０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)



△ABP と △CDP に余弦定理をそれぞれ適用すると，

$$\mathrm{AP}^2 = 2^2 + t^2 - 2\cdot 2\cdot t\cdot \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= t^2 - 2t + 4 \text{ (A)}$$

$$\mathrm{DP}^2 = 2^2 + (3-t)^2 - 2\cdot 2\cdot (3-t)\cdot \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$= 4 + (9 - 6t + t^2) + 2(3-t)$$

$$= t^2 - 8t + 19 \text{ (B)}$$

となる。したがって，△ADP に余弦定理を適用すると，

$$\cos\theta = \frac{(t^2-2t+4)+(t^2-8t+19)-3^2}{2\sqrt{t^2-2t+4}\sqrt{t^2-8t+19}}$$

$$= \frac{t^2-5t+7}{\sqrt{t^2-2t+4}\sqrt{t^2-8t+19}} \text{ (C)}$$

である。また，△APD の面積を 2 通りに表すことで，

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AP}\cdot \mathrm{DP}\cdot \sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot \sqrt{3}$$

(1)　35 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(A) AP^2 を t を用いて表して‥5 点

(B) DP^2 を t を用いて表して‥5 点

(C) $\cos\theta$ を t を用いて表して‥5 点

$$\therefore \sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{t^2-2t+4}\sqrt{t^2-8t+19}}$$ (D)

を得る。以上より，$t^2-5t+7=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ より $\cos\theta \neq 0$，すなわち

$\theta \neq \frac{\pi}{2}$ であることに注意すると，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3\sqrt{3}}{t^2-5t+7}$$

である。

(答) $\tan\theta = \frac{3\sqrt{3}}{t^2-5t+7}$ (E)

このとき，$t^2-5t+7>0$ より $\tan\theta>0$ であるから，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ である。

(F)

(証明終)

(D) $\sin\theta$ を t を用いて表して‥5 点

(E)答‥10 点

・$\theta \neq \frac{\pi}{2}$ の確認の有無は不問

(F) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ を示して‥5 点

(1)[別解 1]

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ とおくと，

$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{c}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=2\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=3$$

である。$\overrightarrow{PA}=\vec{a}-\frac{t}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{PD}=\vec{a}+\frac{3-t}{3}\vec{c}$ であるから，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA}|^2 &= \left|\vec{a}-\frac{t}{3}\vec{c}\right|^2\\ &= |\vec{a}|^2-\frac{2t}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{t^2}{9}|\vec{c}|^2\\ &= t^2-2t+4\end{aligned}$$ (A)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PD}|^2 &= \left|\vec{a}+\frac{3-t}{3}\vec{c}\right|^2\\ &= |\vec{a}|^2+\frac{2(3-t)}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{(3-t)^2}{9}|\vec{c}|^2\\ &= 4+2(3-t)+(3-t)^2\\ &= t^2-8t+19\end{aligned}$$ (B)

(1)[別解 1]　35 点

(A)(B)(C)(G)(E)(F)

(A) $|\overrightarrow{PA}|^2$ を t を用いて表して‥5 点

(B) $|\overrightarrow{PD}|^2$ を t を用いて表して‥5 点

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=\left(\vec{a}-\frac{t}{3}\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\frac{3-t}{3}\vec{c}\right)$$
$$=\left|\vec{a}\right|^2+\frac{3-2t}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{t(3-t)}{9}\left|\vec{c}\right|^2$$
$$=4+(3-2t)-t(3-t)$$
$$=t^2-5t+7$$

より，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PD}\right|}=\frac{t^2-5t+7}{\sqrt{t^2-2t+4}\sqrt{t^2-8t+19}}\ \text{(C)}$$

となる。以上より，$t^2-5t+7=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ より $\cos\theta>0$，すなわち

$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ であることに注意すると，

$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1$$
$$=\frac{(t^2-2t+4)(t^2-8t+19)}{(t^2-5t+7)^2}-1$$
$$=\frac{27}{(t^2-5t+7)^2}\ \text{(G)}$$

であり，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\tan\theta\geqq0$ であるから，

$$\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{t^2-5t+7}$$

である。

(答) $\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{t^2-5t+7}$ (E)

このとき，$t^2-5t+7>0$ より $\tan\theta>0$ であるから，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ である。

(F)

(証明終)

(C) $\cos\theta$ を t を用いて表して‥5 点

(G) $\tan^2\theta$ を t を用いて表して‥5 点

・$\cos\theta\neq0$ の確認の有無は不問

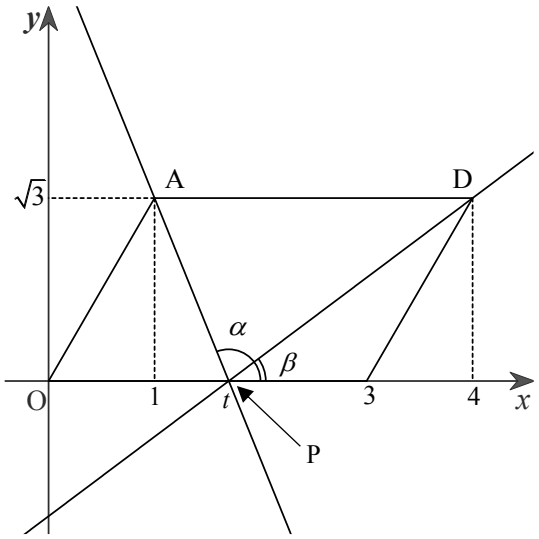
(E)答‥10 点

・$\tan\theta\geqq0$ の確認の有無は不問

(F) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ を示して‥5 点

(1)[別解 2]

(I)[別解 2] 35 点 (H)(I)(J)(K)(F)



前図のような xy 平面上で，x 軸の正の向きと直線 AP, DP がなす角をそれぞれ α, β とおく。ただし，α, β は $0<\alpha<\pi,\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすようにとる。

[1] $t \neq 1$ のとき

直線 AP, DP の傾きはそれぞれ $\dfrac{\sqrt{3}}{1-t}, \dfrac{\sqrt{3}}{4-t}$ であるから，$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{1-t}$ (H), $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{4-t}$ (I)である。ここで，

$$\frac{\sqrt{3}}{1-t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4-t} = -1$$
$$\Leftrightarrow 3 = -(1-t)(4-t)$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 7 = 0$$

となるが，この方程式を満たす t は存在しないから，直線 AP と直線 DP は直交しない。よって，$\theta(=\alpha-\beta)$ に対して $\tan\theta$ が計算でき，

$$\tan\theta = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{1-t} - \dfrac{\sqrt{3}}{4-t}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{1-t}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4-t}}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{t^2-5t+7} \text{ (J)}$$

である。

[2] $t=1$ のとき

(H) $\tan\alpha$ を t を用いて表して‥5 点

(I) $\tan\beta$ を t を用いて表して‥5 点

(J) $t \neq 1$ において $\tan\theta$ を t を用いて表して‥10 点

・$\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ の確認の有無は不問

$\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから,

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$
$$=\frac{1}{\tan\beta}$$
$$=\sqrt{3}\ \text{(K)}$$

である。

以上, [1], [2]より,

$$\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{t^2-5t+7}$$

である。

(答) $\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{t^2-5t+7}$

このとき, $t^2-5t+7>0$ より $\tan\theta>0$ であるから, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ である。

(F)

(証明終)

(K) $t=1$ において $\tan\theta=\sqrt{3}$ ・・10 点

(F) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ を示して・・5 点

(2)

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから, θ を最大, 最小にするような t は, それぞれ $\tan\theta$ を最大, 最小にするような t と一致する。(A)

$$\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

より, $0\leqq t\leqq 3$ のとき $\tan\theta$ を最大にするような t は $\frac{5}{2}$, 最小にするような t は 0 であるから, θ を最大にするような t は $\frac{5}{2}$, 最小にするような t は 0 である。

(答) 最大 : $t=\frac{5}{2}$, 最小 : $t=0$ (B)

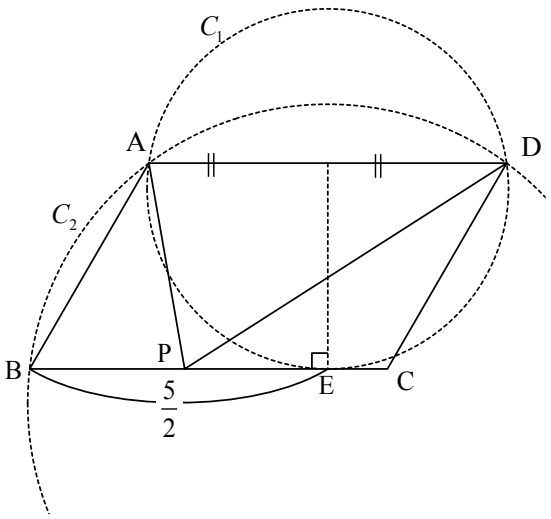
(2) 15 点 (A)(B)

(A) $\tan\theta$ を最大, 最小にする t を求めればよいことを述べて・・5 点

(B)答・・10 点(各 5 点×2)

(2)[別解]

(2)[別解] 15 点 (C)(B)



A, D を通り辺 BC に接する円を C_1 とおき，C_1 と辺 BC の接点を E とおく。(C) E を除く辺 BC 上のすべての点は直線 AD に関して E と同じ側にあり，かつ，C_1 の外部にあるから，$\theta \leqq \angle \mathrm{AED}$ である。よって，θ を最大にするような t は $\frac{5}{2}$ である。また，A, B, D を通る円を C_2 とおくと，B を除く辺 BC 上のすべての点は直線 AD に関して B と同じ側にあり，かつ，C_2 の内部にあるから，$\theta \geqq \angle \mathrm{ABD}$ である。よって，θ を最小にするような t は 0 である。

(答) 最大 : $t = \frac{5}{2}$，最小 : $t = 0$ (B)

(C)円を用いて考える方針‥5 点

(B)答‥10 点(各 5 点×2)

4 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$x-1<[x]\leqq x$ (A)が成立するから，$a_n=k$ のとき，

$$\sqrt{2n}-\frac{1}{2}<k\leqq\sqrt{2n}+\frac{1}{2} \text{ (B)}$$

$$\Leftrightarrow k-\frac{1}{2}\leqq\sqrt{2n}<k+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\leqq 2n<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\left(\because k-\frac{1}{2}>0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{8}\leqq n<\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{8} \text{ (C)}$$

である。ここで，$k(k-1)$ と $k(k+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから，$\frac{1}{2}k(k-1)$ と $\frac{1}{2}k(k+1)$ は整数である。$k\geqq 1$ のとき

$1\leqq\frac{1}{2}k(k-1)+1\leqq\frac{1}{2}k(k+1)$ であるから，$a_n=k$ となるような n の最小値は $\frac{1}{2}k(k-1)+1$，最大値は $\frac{1}{2}k(k+1)$ である。

(答) 最小値：$\frac{1}{2}k(k-1)+1$，最大値：$\frac{1}{2}k(k+1)$ (D)

(1)　30 点 (A)(B)(C)(D)

(A) $x-1<[x]\leqq x$ を利用する方針 ‥7 点

(B) k の不等式を立式して‥7 点

(C) n について解いて‥6 点

(D)答‥10 点(各 5 点×2)

・最小値を $\left[\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]+1$，最大値を $\left[\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right]$ としている場合は 4 点(各 2 点×2)

(1)[別解]

$$a_1=\left[\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right]=[1.4\ldots+0.5]=1 \text{ (E 1/6)}$$

$$a_2=\left[2+\frac{1}{2}\right]=2 \text{ (E 2/6)}$$

$$a_3=\left[\sqrt{6}+\frac{1}{2}\right]=[2.4\ldots+0.5]=2 \text{ (E 3/6)}$$

$$a_4=\left[\sqrt{8}+\frac{1}{2}\right]=[2.8\ldots+0.5]=3 \text{ (E 4/6)}$$

(1)[別解]　30 点 (E)(F)(G)(H)

(E) $a_1, a_2, \cdots a_6$ を求めて‥6 点(各 1 点×6)

・最大値と最小値の予想を正しく立てられていれば無条件に加点して可

$$a_5=\left[\sqrt{10}+\frac{1}{2}\right]=[3.1\ldots+0.5]=3 \text{ (E 5/6)}$$

$$a_6=\left[\sqrt{12}+\frac{1}{2}\right]=[3.4\ldots+0.5]=3 \text{ (E 6/6)}$$

$$a_7=\left[\sqrt{14}+\frac{1}{2}\right]=[3.7\ldots+0.5]=4$$

となるため,

$$\{a_n\}:1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

のように自然数 k が k 個並ぶと予想できる。すなわち, $a_n=k$ となるような n の最小値は $\frac{1}{2}k(k-1)+1$, 最大値は $\frac{1}{2}k(k+1)$ と予想できる。

(F)この予想を示すには,

$$\begin{cases} a_{\frac{1}{2}k(k-1)+1}=k \\ a_{\frac{1}{2}k(k+1)}=k \end{cases}$$

を示せばよい。実際,

$$\begin{aligned} a_{\frac{1}{2}k(k-1)+1} &= \left[\sqrt{k(k-1)+2}+\frac{1}{2}\right] \\ &= \left[k+\left(\sqrt{k(k-1)+2}-k+\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \left[k+\frac{k(k-1)+2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{k(k-1)+2}+k-\frac{1}{2}}\right] \\ &= \left[k+\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{k(k-1)+2}+\left(k-\frac{1}{2}\right)}\right] \\ &= k \text{ (G)} \quad \left(\because \sqrt{k(k-1)+2}+\left(k-\frac{1}{2}\right)>1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{\frac{1}{2}k(k+1)} &= \left[\sqrt{k(k+1)}+\frac{1}{2}\right] \\ &= \left[k+\left(\sqrt{k(k+1)}-k\right)+\frac{1}{2}\right] \\ &= \left[k+\frac{k(k+1)-k^2}{\sqrt{k(k+1)}+k}+\frac{1}{2}\right] \\ &= \left[k+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}+\frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

(F)最大値と最小値を正しく予想して‥10 点(各 5 点×2)

(G) $a_{\frac{1}{2}k(k-1)+1}=k$ を示して‥7 点

$$= k \text{ (H)} \quad \left(\because \sqrt{1+\frac{1}{k}}+1>2 \right)$$

となり，確かに成立している。

(答) 最小値：$\frac{1}{2}k(k-1)+1$，最大値：$\frac{1}{2}k(k+1)$

(H) $a_{\frac{1}{2}k(k+1)} = k$ を示して‥7 点

(2)

(1)より，数列 $\{a_n\}$ の第 $\frac{1}{2}k(k-1)+1$ 項から第 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 項までは k である。(A)そこで，数列 $\{a_n\}$ を

$$\underset{\text{第1群}}{1} \mid \underset{\text{第2群}}{2, 2} \mid \underset{\text{第3群}}{3, 3, 3} \mid \underset{\text{第4群}}{4, 4, 4, 4} \mid 5, \ldots$$

のように群に分ける(B)と，第 k 群には k が k 個並ぶ。このとき，第14群の最後の数は，

$$\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 15 = 105$$

より数列 $\{a_n\}$ の第105項であり，

$$\begin{aligned} S_{105} &= 1+2+2+3+3+3+\cdots+14 \\ &= \sum_{k=1}^{14} k^2 \\ &= \frac{1}{6}\cdot 14\cdot 15\cdot 29 \\ &= 1015 \text{ (C)} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} S_{104} &= S_{105} - 14 = 1001 > 1000 \\ S_{103} &= S_{104} - 14 = 987 < 1000 \end{aligned}$$

となり，S_n は n について単調に増加する(D)から，$S_n < 1000$ を満たす最大の n は103である。

(答) 103 (E)

(2) 30 点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A)数列の規則を説明して‥5 点

(B)適切な群数列を設定して‥5 点

(C) $S_{105} = 1015$ ‥5 点

(D) $n = 103$ が最大になることを説明して‥5 点

(E)答‥10 点

5 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$$g'(x)=\frac{2ax\cdot\left(1+x^2\right)^2-ax^2\cdot 2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left\{\left(1+x^2\right)^2\right\}^2}$$

$$=-\frac{2ax(x-1)(x+1)}{\left(1+x^2\right)^3}\ \text{(A)}$$

となるため，$a>0$ より，関数 $g(x)$ の増減は下表(B)の通りである。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	$\frac{a}{4}$	↘	0	↗	$\frac{a}{4}$	↘

上表より，曲線 C_2 の x 軸に平行な接線は直線 $y=0$ と直線 $y=\frac{a}{4}$ であるため，求める値は，

$$\frac{a}{4}=1$$

$$\therefore a=4\ \text{(C)}$$

である。

(答) $a=4$

(I) 22 点 (A)(B)(C)

(A) $g(x)$ を微分して‥7 点

(B) $g(x)$ の増減表を描いて‥7 点

(C) a の値を求めて‥8 点

(1)[別解]

曲線 C_2 と直線 $y=1$ の接点の x 座標を b とする。このとき，$g(0)=0\neq 1$ より，$b\neq 0$ である。また，関数 $g(x)$ は偶関数であるため，曲線 C_2 と直線 $y=1$ は点 $(-b,1)$ でも接する。さらに，曲線 C_2 と直線 $y=1$ の共有点の x 座標は，x についての方程式

(I)[別解] 22 点 (D)(E)(C)

$$g(x)=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{ax^2}{(1+x^2)^2}=1$$
$$\Leftrightarrow x^4-(a-2)x^2+1=0$$

の実数解であるため，x についての 4 次方程式 $x^4-(a-2)x^2+1=0$ は $x=\pm b$ をそれぞれ 2 重解としてもつ(D)。よって，因数定理より，

$$x^4-(a-2)x^2+1=(x-b)^2(x+b)^2$$
$$\Leftrightarrow x^4-(a-2)x^2+1=x^4-2b^2x^2+b^4$$
$$\Leftrightarrow (a-2b^2-2)x^2+b^4-1=0$$

は x についての恒等式となる(E)ため，

$$\begin{cases} a-2b^2-2=0 \\ b^4-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2b^2+2 \\ b=\pm 1 \end{cases}$$
$$\therefore a=4,\ b=\pm 1$$

より，求める値は $a=4$ (C)である。

(答) $a=4$

(D)接点の x 座標についての条件を方程式が重解をもつ条件に換言して‥8 点

(E) x についての恒等式を導いて‥6 点

(C) a の値を求めて‥8 点

(2)

(1)より，$g(x)=\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}$ である。よって，$f(1)=g(1)$ であり，$x>1$ のとき，

$$g(x)>f(x)>0$$

であるため，1 より大きい実数 t に対し，

$$V(t)=\pi\int_1^t\left\{(g(x))^2-(f(x))^2\right\}dx$$
$$=\pi\int_1^t\frac{16(x^4-1)}{(1+x^2)^4}dx$$
$$=\pi\int_1^t\frac{16(x^2-1)}{(1+x^2)^3}dx \text{ (A)}$$

となる。ここで，θ_t を $\tan\theta_t=t,\ 0<\theta_t<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とし，

$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換すると，積分範囲は下表のようになる。

(2) 38 点 (A)(B)(C)(D)

(A) $V(t)$ を正しく立式して‥6 点

x	1	$\to$	t
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	θ_t

また，$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$ より，

$$\begin{aligned}\frac{16\left(x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\cdot\frac{dx}{d\theta}&=\frac{16\left(\tan^2\theta-1\right)}{\left(1+\tan^2\theta\right)^3}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\\&=16\cdot\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\left(\cos^2\theta\right)^3\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\\&=-16\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\cos^2\theta\\&=-16\cdot\cos2\theta\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}\\&=-8\left(\cos2\theta+\cos^2 2\theta\right)\\&=-8\left(\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\right)\\&=-\left(4+8\cos2\theta+4\cos4\theta\right)\text{(B)}\end{aligned}$$

であるため，

$$\begin{aligned}V(t)&=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_t}\frac{16\left(x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_t}\left(4+8\cos2\theta+4\cos4\theta\right)d\theta\\&=-\pi\left[4\theta+4\sin2\theta+\sin4\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_t}\\&=-\pi\left\{\left(4\theta_t+4\sin2\theta_t+\sin4\theta_t\right)-\left(\pi+4\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi\right)\right\}\\&=\pi\left(4+\pi-4\theta_t-4\sin2\theta_t-\sin4\theta_t\right)\text{(C)}\end{aligned}$$

となる。さらに，$\lim_{t\to\infty}\theta_t=\frac{\pi}{2}$ であるため，求める極限は，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}V(t)&=\pi\left(4+\pi-4\cdot\frac{\pi}{2}-4\sin\pi-\sin2\pi\right)\\&=\left(4-\pi\right)\pi\text{(D)}\end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{t\to\infty}V(t)=\left(4-\pi\right)\pi$

(B) $x=\tan\theta$ と置換したときの被積分関数を積分可能な形に式変形して‥12 点

(C) $V(t)$ を θ_t を用いて表して‥12 点

(D)極限値 $\lim_{t\to\infty}V(t)$ を求めて‥8 点

(2)[別解]

(2)[別解] 38 点 (A)(E)(F)(D)

(1)より，$g(x)=\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}$ である。よって，$f(1)=g(1)$ であり，$x>1$ のとき，

$$g(x)>f(x)>0$$

であるため，1 より大きい実数 t に対し，

$$V(t)=\pi\int_1^t\left\{(g(x))^2-(f(x))^2\right\}dx$$

$$=\pi\int_1^t\frac{16(x^4-1)}{(1+x^2)^4}dx$$

$$=4\pi\int_1^t\frac{4x^2-4}{(1+x^2)^3}dx \text{ (A)}$$

(A) $V(t)$ を正しく立式して‥6 点

となる。また，

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{1+x^2}=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1+x^2)^2}=\frac{1\cdot(1+x^2)^2-x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

より，

$$-\frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right\}=-\left\{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+2\cdot\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}\right\}$$

$$=\frac{x^4+6x^2-3}{(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{4x^2-4}{(1+x^2)^3}$$

であるため，

$$V(t)=-4\pi\int_1^t\frac{dx}{1+x^2}-4\pi\int_1^t\frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right\}dx$$

$$=-4\pi\int_1^t\frac{dx}{1+x^2}-4\pi\left[\frac{x}{1+x^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]_1^t$$

$$=\left(4-4\int_1^t\frac{dx}{1+x^2}\right)\pi-4\pi\left\{\frac{t}{1+t^2}+\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right\} \text{ (E)}$$

(E)左式を導いて‥12 点

となる。ここで，θ_t を $\tan\theta_t = t,\ 0 < \theta_t < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とし，

$x = \tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換すると，$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + x^2$ であり，積分範囲は下表のようになる。

x	1	$\to$	t
θ	$\dfrac{\pi}{4}$	$\to$	θ_t

よって，

$$4\int_1^t \frac{dx}{1+x^2} = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_t} d\theta = 4\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_t} = 4\left(\theta_t - \frac{\pi}{4}\right) = 4\theta_t - \pi$$

であるため，

$$V(t) = (4 - 4\theta_t + \pi)\pi - 4\pi\left\{\frac{t}{1+t^2} + \frac{2t}{(1+t^2)^2}\right\} \text{(F)}$$

となる。また，$\lim_{t\to\infty}\theta_t = \dfrac{\pi}{2}$ であるため，求める極限は，

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \left(4 - 4\cdot\frac{\pi}{2} + \pi\right)\pi - 4\pi\cdot(0+0)$$

$$= (4-\pi)\pi \text{(D)}$$

である。

(答) $\lim_{t\to\infty} V(t) = (4-\pi)\pi$

(F) $V(t)$ を θ_t と t を用いて表して‥12 点

(D) 極限値 $\lim_{t\to\infty} V(t)$ を求めて‥8 点

6 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

x についての 2 次方程式

$$x^2-\frac{b^2-2b-1}{2}=ax+b$$

$$\Leftrightarrow x^2-ax-\frac{b^2-1}{2}=0$$

の判別式を D_1 とすると，L が C_1 と接するとき，

$D_1=0$ (A)

$\Leftrightarrow (-a)^2-4\cdot1\cdot\left(-\frac{b^2-1}{2}\right)=0$ (B)

$\therefore a^2=2-2b^2$ (C)

である。

(答) $a^2=2-2b^2$

(1)[別解]

$y=x^2-\frac{b^2-2b-1}{2}$ を x で微分すると $y'=2x$ となるから，L と C_1 の接点の x 座標を t とおくと，

$$\begin{cases}2t=a\\ t^2-\frac{b^2-2b-1}{2}=at+b\end{cases}$$ (D)

となる。よって，

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{b^2-2b-1}{2}=a\cdot\frac{a}{2}+b$$

$\therefore a^2=2-2b^2$ (C)

である。

(答) $a^2=2-2b^2$

(2)

L が C_2 と接するとき，点 $(0,k)$ と直線 $ax-y+b=0$ の距離が $\sqrt{2}$ (A)であるから，点と直線の距離の公式より，

(1)　15 点 (A)(B)(C)

(A) $x^2-ax-\frac{b^2-1}{2}=0$ の判別式が 0 ‥5 点

(B) $x^2-ax-\frac{b^2-1}{2}=0$ の判別式は $(-a)^2-4\cdot1\cdot\left(-\frac{b^2-1}{2}\right)$ ‥5 点

(C)答‥5 点

(1)[別解]　15 点 (D)(C)

(D) a, b, t の連立方程式を立式して ‥10 点(各 5 点×2)

(C)答‥5 点

(2)　15 点 (A)(B)(C)

(A) 点 $(0,k)$ と直線 $ax-y+b=0$ の距離が $\sqrt{2}$ ‥5 点

$$\frac{|a\cdot 0-1\cdot k+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}\ \text{(B)}$$

(B) $\frac{|a\cdot 0-1\cdot k+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$ ‥5 点

$$\Leftrightarrow \frac{(-k+b)^2}{a^2+1}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(-k+b)^2=a^2+1\ (\because a^2+1>0)$$

$$\therefore a^2=\frac{1}{2}b^2-bk+\frac{1}{2}k^2-1\ \text{(C)}$$

(C)答‥5 点

である。

(答) $a^2=\frac{1}{2}b^2-bk+\frac{1}{2}k^2-1$

(2)[別解]

(2)[別解] 15 点 (D)(E)(C)

C_2 の式に L の式を代入すると,

$$x^2+(ax+b-k)^2=2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+1)x^2+2a(b-k)x+(b-k)^2-2=0 \quad \cdots ①$$

となる。x についての 2 次方程式①の判別式を D_2 とすると,

$$\frac{D_2}{4}=\{a(b-k)\}^2-(a^2+1)\{(b-k)^2-2\}\ \text{(D)}$$

(D)①の判別式 D_2 を a, b, k で表して‥5 点

・$\frac{D_2}{4}$ を a, b, k で表しても可

$$=-(b-k)^2+2(a^2+1)$$

であり, L が C_2 と接するとき①は重解をもつから,

$$D_2=0\ \text{(E)}$$

(E)①の判別式が 0 ‥5 点

$$\Leftrightarrow -(b-k)^2+2(a^2+1)=0$$

$$\therefore a^2=\frac{1}{2}b^2-bk+\frac{1}{2}k^2-1\ \text{(C)}$$

(C)答‥5 点

である。

(答) $a^2=\frac{1}{2}b^2-bk+\frac{1}{2}k^2-1$

(3)

(3) 30 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(1), (2)の結果より,

$$a^2=2-2b^2 \text{ かつ } a^2=\frac{1}{2}b^2-bk+\frac{1}{2}k^2-1$$

$$\Leftrightarrow a^2=2-2b^2 \text{ かつ } 2-2b^2=\frac{1}{2}b^2-bk+\frac{1}{2}k^2-1\ \text{(A)}$$

(A) b, k の関係式‥5 点

$$\Leftrightarrow a^2=2-2b^2 \text{ かつ } 5b^2-2bk+k^2-6=0$$

を満たす実数 a, b が存在するような k の値の範囲を求めればよい。

$a^2=2-2b^2$ より, b は

$$2-2b^2 \geqq 0$$
$$\therefore -1 \leqq b \leqq 1$$

を満たす必要があり，b が $-1 \leqq b \leqq 1$ を満たすとき，実数 $a=\sqrt{2-2b^2}$ が存在するから，

$-1 \leqq b \leqq 1$(B)かつ $5b^2-2bk+k^2-6=0$

(B) $-1 \leqq b \leqq 1$ ・・5 点

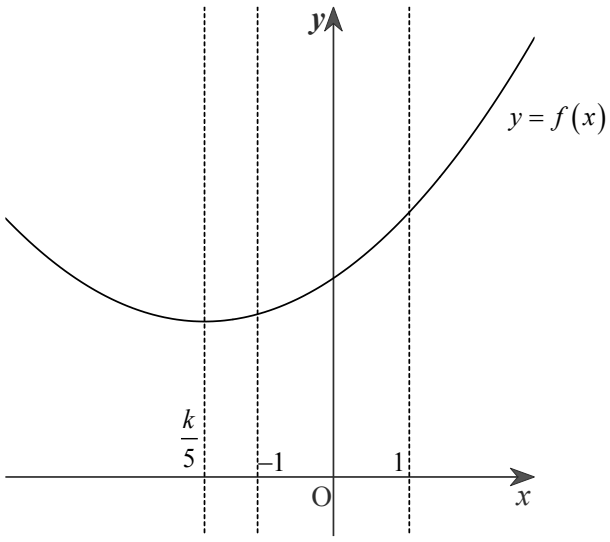
を満たす実数 b が存在するような k の値の範囲を求めればよい。ここで，

$$f(b)=5b^2-2bk+k^2-6$$

$$\therefore f(b)=5\left(b-\frac{k}{5}\right)^2+\frac{4}{5}k^2-6$$

とおくと，$y=f(x)$ のグラフは $x=\frac{k}{5}$ を軸とする下に凸の放物線である。

[1] $\frac{k}{5} \leqq -1$ のとき，すなわち $k \leqq -5$ のとき



$$f(-1)=k^2+2k-1$$
$$=(k+1)^2-2$$
$$>0\ (\because k+1 \leqq -4)$$

であるから，前図のように $-1 \leqq b \leqq 1$ で $f(b)>0$ となり，条件を満たさない。(C)

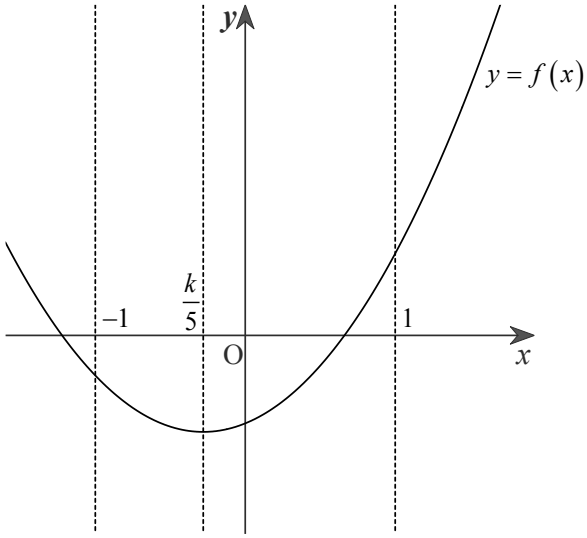
(C) $k \leqq -5$ **のとき条件を満たさない**
・・5 点

[2] $1 \leqq \frac{k}{5}$ のとき，すなわち $5 \leqq k$ のとき

$$f(1)=k^2-2k-1$$
$$=(k-1)^2-2$$
$$>0\ (\because k-1\geqq 4)$$

であるから，[1]と同様に条件を満たさない。(D)

[3] $-1<\dfrac{k}{5}<1$ のとき，すなわち $-5<k<5$ のとき



$-1\leqq b\leqq 1$ かつ $f(b)=0$ を満たす b が存在するのは，

$f\left(\dfrac{k}{5}\right)\leqq 0$ かつ「$f(-1)\geqq 0$ または $f(1)\geqq 0$」(E)

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{5}k^2-6\leqq 0$ かつ「$(k+1)^2-2\geqq 0$ または $(k-1)^2-2\geqq 0$」

$\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{30}}{2}\leqq k\leqq \dfrac{\sqrt{30}}{2}$ かつ

「$k\leqq -1-\sqrt{2}$ または $-1+\sqrt{2}\leqq k$ または $k\leqq 1-\sqrt{2}$ または $1+\sqrt{2}\leqq k$」

のときである。ここで，

$$-5<-\frac{\sqrt{30}}{2}<1-\sqrt{2}<-1+\sqrt{2}<\frac{\sqrt{30}}{2}<5$$

に注意すると，これは

$$-\frac{\sqrt{30}}{2}\leqq k\leqq 1-\sqrt{2}\ \text{または}\ -1+\sqrt{2}\leqq k\leqq \frac{\sqrt{30}}{2}$$

のときである。

以上，[1], [2], [3]より，求める k のとりうる値の範囲は，

(D) $5\leqq k$ **のとき条件を満たさない**
‥5 点

(E) $-5<k<5$ **のときの条件を整理して‥5 点**

$$-\frac{\sqrt{30}}{2} \leqq k \leqq 1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2} \leqq k \leqq \frac{\sqrt{30}}{2}$$ (F)

である。

(答) $-\frac{\sqrt{30}}{2} \leqq k \leqq 1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2} \leqq k \leqq \frac{\sqrt{30}}{2}$

(F)答‥5 点

(3)[別解]

(場合分けの直前まで本解と共通)(A)(B)

以下，$f(1)\cdot f(-1)$ の符号で場合分けを行う。

[1] $f(1)\cdot f(-1) \leqq 0$ のとき

このとき常に $-1 \leqq b \leqq 1$ かつ $f(b)=0$ を満たす b が存在する(G)から，k のとりうる値の範囲は

$$f(1)\cdot f(-1) \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow (k^2-2k-1)(k^2+2k-1) \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow \{(k-1)^2-2\}\{(k+1)^2-2\} \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow (k-1-\sqrt{2})(k-1+\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})(k+1+\sqrt{2}) \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow -1-\sqrt{2} \leqq k \leqq 1-\sqrt{2} \text{ または } -1+\sqrt{2} \leqq k \leqq 1+\sqrt{2}$$ (H)

である。

[2] $f(1)\cdot f(-1) > 0$ のとき

$-1 \leqq b \leqq 1$ かつ $f(b)=0$ を満たす b が存在するのは，

$$f(1)>0 \text{ かつ } f(-1)>0 \text{ かつ } -1<\frac{k}{5}<1 \text{ かつ } f\left(\frac{k}{5}\right) \leqq 0$$ (I)

のときである。よって，

$$f(1)>0 \Leftrightarrow k<1-\sqrt{2} \text{ または } 1+\sqrt{2}<k$$
$$f(-1)>0 \Leftrightarrow k<-1-\sqrt{2} \text{ または } -1+\sqrt{2}<k$$
$$-1<\frac{k}{5}<1 \Leftrightarrow -5<k<5$$
$$f\left(\frac{k}{5}\right) \leqq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{30}}{2} \leqq k \leqq \frac{\sqrt{30}}{2}$$

より，k のとりうる値の範囲は

$$-\frac{\sqrt{30}}{2} \leqq k < -1-\sqrt{2} \text{ または } 1+\sqrt{2}<k \leqq \frac{\sqrt{30}}{2}$$

である。

以上，[1], [2]より，求める k のとりうる値の範囲は

$$-\frac{\sqrt{30}}{2} \leqq k \leqq 1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2} \leqq k \leqq \frac{\sqrt{30}}{2}$$ (F)

である。

(3)[別解]　30 点

(A)(B)(G)(H)(I)(F)

(A)(B)共通部分‥10 点

(G) $f(1)\cdot f(-1) \leqq 0$ のとき常に条件を満たす‥5 点

(H) $f(1)\cdot f(-1) \leqq 0$ のときの k の範囲‥5 点

(I) $f(1)\cdot f(-1) > 0$ のときの条件を整理して‥5 点

(F)答‥5 点

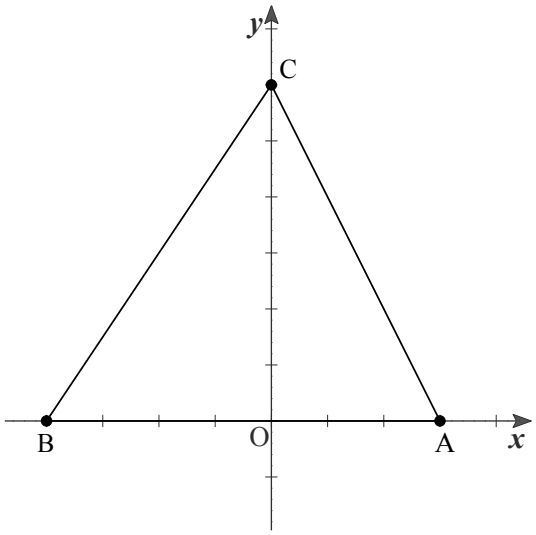
(答) $-\frac{\sqrt{30}}{2} \leqq k \leqq 1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2} \leqq k \leqq \frac{\sqrt{30}}{2}$

7 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)



線分 AC 上の格子点の個数を考える。線分 AC の式は

$y=-\dfrac{c}{a}x+c\ (0\leqq x\leqq a)$ (A)である。a, c を互いに素な整数 a', c' を用いて $a=g_{ac}a', c=g_{ac}c'$ (B)と表す。このとき線分 AC の式は

$y=-\dfrac{c'}{a'}x+c\ (0\leqq x\leqq g_{ac}a')$ となる。ここで，a', c' が互いに素であるため，x, y がともに整数となるのは $x=0, a', 2a', \cdots, g_{ac}a'$ のときである。したがって，線分 AC 上の格子点の個数は $g_{ac}+1$ 個である。

(答) $g_{ac}+1$ 個(C)

(1)　25 点 (A)(B)(C)

(A)線分 AC の式‥5 点

・解答中で定義域についての言及がない場合 3 点

(B) a, c を g_{ac}, a', c' を用いて表す‥5 点

(C)答‥15 点

(2)

線分 BC についても同様に考える。b と c の最大公約数を g_{bc} とおくと，線分 BC 上の格子点の個数は $g_{bc}+1$ 個である。したがって，△ABC の辺上の格子点の個数は

$$N=a+b+1+g_{bc}+1+g_{ac}+1-3$$
$$=a+b+g_{bc}+g_{ac}\ \text{(個)}\ \text{(A)}$$

(2)　35 点 (A)(B)(C)

(A) N を g_{bc}, g_{ac}, a, b を用いて表す‥10 点

である。$a \geqq g_{ac}, b \geqq g_{bc}$ より，$a+b+g_{bc}+g_{ac} \leqq 2(a+b)$ である。したがって，$N=16$ となるのは $a+b \geqq 8$ のときに限られる。$a+b \geqq 8$ となる (a, b) の組のうち $a \leqq b$ を満たすのは

$$(a, b)=(2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4)$$
$$(4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)$$

である。各 (a, b) の組について $N=16$ となる c が存在するか考えると，

$$(a, b, c)=(2, 6, 6), (4, 4, 4), (4, 6, 4), (6, 6, 2), (6, 6, 4)$$

(B 1/2)

の5通り存在する。また，上記の各組について a と b を入れ替えても $a+b+g_{bc}+g_{ac}=16$ が成り立つ。(B 2/2) したがって，求める確率は $\frac{7}{216}$ である。

(答) $\frac{7}{216}$ (C)

(B)条件を満たす (a, b, c) の組を求め，a と b を入れ替えても成り立つことを言及して‥15 点(完答)

(C)答‥10 点

(2)[別解]

線分 AC 上の格子点の個数(A, C は除く)は下表のようになる。

$a \backslash c$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	2	0	0	2
4	0	1	0	3	0	1
5	0	0	0	0	4	0
6	0	1	2	1	0	5

したがって，線分 OA 上の格子点の個数(O は除き A は含む)と辺 AC 上の格子点の個数(A, C は除く)の和(f_{ac} とおく)は下表のようになる。

$a \backslash c$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	2	3	2	3
3	3	3	5	3	3	5
4	4	5	4	7	4	5
5	5	5	5	5	9	5
6	6	7	8	7	6	11

(2)[別解]　35 点 (D)(E)(C)

上表は a を b に置き換えても成り立つ。線分 OB 上の格子点の個数(O は除き B は含む)と辺 BC 上の格子点の個数(B, C は除く)の和を f_{bc} とおくと，△ABC の辺上の格子点の数は $f_{ac}+f_{bc}+2$ (個)(D)となる。

$N=16$，すなわち $f_{ac}+f_{bc}=14$ となるのは，

$(f_{ac}, f_{bc})=(3, 11), (11, 3), (7, 7)$ のときである。このとき，対応する (a, b, c) の組は

$$(a, b, c)=(2, 6, 6), (6, 2, 6), (4, 4, 4),$$
$$(4, 6, 4), (6, 4, 4), (6, 6, 4), (6, 6, 2) \text{(E)}$$

の 7 通りである。したがって，求める確率は $\frac{7}{216}$ である。

(答) $\frac{7}{216}$ (C)

(D) $f_{ac}+f_{bc}+2$・・10 点

(E)条件を満たす (a, b, c) の組を求めて・・15 点(完答)

(C)答・・10 点

8 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

共通接線と C_1, C_2 の接点の x 座標をそれぞれ s, t とおく。C_1 について $y' = e^{x-a}$ より，接線の方程式は

$$y = e^{s-a}(x-s) + e^{s-a} + a$$

$$\therefore\ y = e^{s-a}x + (1-s)e^{s-a} + a \quad \text{(A)}$$

である。また，C_2 について $y' = \dfrac{1}{x+2}$ より，接線の方程式は

$$y = \frac{1}{t+2}(x-t) + \log(t+2)$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{t+2}x + \log(t+2) - \frac{t}{t+2} \quad \text{(B)}$$

である。ゆえに，2 つの接線の方程式の傾きと y 切片を比較することで

$$\begin{cases} e^{s-a} = \dfrac{1}{t+2} & \cdots ① \\ (1-s)e^{s-a} + a = \log(t+2) - \dfrac{t}{t+2} & \cdots ② \end{cases}$$

(C)

を得る。①より $t = e^{a-s} - 2$ であり，これを②に代入すると

$$(1-s)e^{s-a} + a = a - s - \frac{e^{a-s} - 2}{e^{a-s}}$$

$$\Leftrightarrow (1-s)e^{s-a} + a = a - s - 1 + 2e^{s-a}$$

$$\Leftrightarrow (e^{s-a} - 1)(s+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow s = a, -1$$

となる。したがって，

①かつ② $\Leftrightarrow (s, t) = (a, -1), (-1, e^{a+1} - 2)$ (D)

であるから，

$$\begin{cases} l_1 : y = x + 1 \\ l_2 : y = e^{-a-1}x + 2e^{-a-1} + a \end{cases}$$

(I)　35 点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A) C_1 の接線の方程式を求めて‥5 点

(B) C_2 の接線の方程式を求めて‥5 点

(C) s, t が満たす連立方程式を立てて‥5 点(完答)

(D) $(s, t) = (a, -1), (-1, e^{a+1} - 2)$ ‥10 点(各 5 点×2)

となる。

(答) $\begin{cases} l_1 : y = x+1 \\ l_2 : y = e^{-a-1}x + 2e^{-a-1} + a \end{cases}$ (E)

(E)答‥10 点(各 5 点×2)

(2)

l_1 の傾きは 1，2 つの接点の x 座標は $a, -1$ であるから，

$$d_1 = \sqrt{1^2+1^2}\,|a-(-1)|$$

$$= \sqrt{2}\,|a+1| \text{ (A)}$$

である。l_2 の傾きは e^{-a-1}，2 つの接点の x 座標は $-1, e^{a+1}-2$ であるから，

$$d_2 = \sqrt{1^2+\left(e^{-a-1}\right)^2}\,\left|-1-\left(e^{a+1}-2\right)\right|$$

$$= \sqrt{1+e^{-2a-2}}\,\left|e^{a+1}-1\right| \text{ (B)}$$

である。よって，

$$\frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{1+e^{-2a-2}}{2}}\left|\frac{e^{a+1}-1}{a+1}\right|$$

となる。ここで，$h = a+1$ と置換すると，$a \to -1$ のとき $h \to 0$ であり，

$$\lim_{a\to-1}\frac{e^{a+1}-1}{a+1} = \lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h} = 1 \text{ (C)}$$

であるから，

$$\lim_{a\to-1}\frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{1+1}{2}}\cdot 1 = 1$$

となる。

(答) $\lim_{a\to-1}\frac{d_2}{d_1} = 1$ (D)

(2)　25 点 (A)(B)(C)(D)

(A) $d_1 = \sqrt{2}\,|a+1|$ ‥5 点

・絶対値を考慮していない場合 2 点

(B) $d_2 = \sqrt{1+e^{-2a-2}}\,\left|e^{a+1}-1\right|$ ‥5 点

・絶対値を考慮していない場合 2 点

(C) $\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ の利用に気づいて

‥5 点

(D)答‥10 点

9 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$P_0(x)=1,\ P_1(x)=2x$ より，

$$\begin{aligned}P_2(x)&=2xP_1(x)-2\cdot1\cdot P_0(x)\\&=2x\cdot2x-2\cdot1\cdot1\\&=4x^2-2\end{aligned}$$

である。ここで，正の整数 n に対し，等式

$$P_n'(x)=2nP_{n-1}(x) \qquad \cdots ①$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法により示す。

[1] $n=1,\ 2$ のとき

$P_0(x)=1,\ P_1(x)=2x$ より，

$$P_1'(x)=2,\ 2\cdot1\cdot P_0(x)=2$$

となるため，$n=1$ のとき，①が成り立つ(A)。

また，$P_1(x)=2x,\ P_2(x)=4x^2-2$ より，

$$P_2'(x)=8x,\ 2\cdot2\cdot P_1(x)=8x$$

となるため，$n=2$ のとき，①が成り立つ(B)。

[2] $n=m-1,\ m$ (m は 2 以上の整数)のとき

①が成り立つと仮定する。このとき，

$$\begin{aligned}P_{m+1}'(x)&=2\cdot P_m(x)+2x\cdot P_m'(x)-2mP_{m-1}'(x)\\&=2P_m(x)+2x\cdot2mP_{m-1}(x)-2m\cdot2(m-1)P_{m-2}(x)\\&=2P_m(x)+2m\{2xP_{m-1}(x)-2(m-1)P_{m-2}(x)\}\\&=2P_m(x)+2m\cdot P_m(x)\\&=2(m+1)P_m(x)\end{aligned}$$

となるため，$n=m+1$ のときも①が成り立つ(C)。

以上, [1], [2]より，正の整数 n に対し，①が成り立つ(D)。

(証明終)

(1) 22 点 (A)(B)(C)(D)

(A) $n=1$ のとき，①が成り立つことを示して‥4 点

(B) $n=2$ のとき，①が成り立つことを示して‥4 点

(C) $n=m+1$ のとき，①が成り立つことを示して‥10 点

(D)証明完了‥4 点

(2)

正の整数 n に対し，等式

$$P_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$P_1(x)=2x$ であり，

$$(-1)^1 e^{x^2}\frac{d^1}{dx^1}e^{-x^2}=-1\cdot e^{x^2}\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right)=2x$$

となるため，$n=1$ のとき，②が成り立つ(A)。

[2] $n=m$ (m は正の整数)のとき

②が成り立つと仮定する。このとき，(1)より，

$$\begin{aligned}P_{m+1}(x)&=2xP_m(x)-2mP_{m-1}(x)\\&=2xP_m(x)-P_m'(x)\\&=2x\cdot(-1)^m e^{x^2}\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2}\\&\quad-\left\{(-1)^m\cdot 2xe^{x^2}\cdot\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2}+(-1)^m\cdot e^{x^2}\cdot\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}e^{-x^2}\right\}\\&=(-1)^{m+1}e^{x^2}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}e^{-x^2}\end{aligned}$$

となるため，$n=m+1$ のときも②が成り立つ(B)。

以上，[1], [2]より，正の整数 n に対し，②が成り立つ(C)。

(証明終)

(2)　18 点 (A)(B)(C)

(A) $n=1$ のとき，②が成り立つことを示して‥4 点

(B) $n=m+1$ のとき，②が成り立つことを示して‥10 点

(C)証明完了‥4 点

(3)

(2)より，2 以上の整数 n に対し，

$$\begin{aligned}P_n(x)e^{-x^2}&=\left\{(-1)^n\cdot e^{x^2}\cdot\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\right\}e^{-x^2}\\&=\frac{d}{dx}\left\{(-1)^n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\right\}\\&=\frac{d}{dx}\left(-P_{n-1}(x)e^{-x^2}\right)\text{(A)}\end{aligned}$$

となり，これは $n=1$ のときも成り立つ。また，$P_{n-1}(t)$, $P_{n-1}(-t)$ は共に多項式であるため，

(3)　20 点 (A)(B)

(A)左式を示して‥10 点

(B)証明完了‥10 点

・$n=1$ の場合が示せていないときは 3 点減点

・$n=1$ のときに(A)の等式が成り立

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}P_n(x)e^{-x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}\frac{d}{dx}\left(-P_{n-1}(x)e^{-x^2}\right)dx$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[-P_{n-1}(x)e^{-x^2}\right]_{-t}^{t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(-P_{n-1}(t)+P_{n-1}(-t)\right)e^{-t^2}$$
$$=0\ \text{(B)}$$

である。

(証明終)

つことを述べていない場合は，別解の(C)のように $\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}P_1(x)e^{-x^2}dx=0$ を直接計算で示せばよい

(3)[別解]

$P_1(x)=2x$ より，$P_1(x)e^{-x^2}$ は奇関数であるため，正の実数 t に対し，

$\int_{-t}^{t}P_1(x)e^{-x^2}dx=0$ となる。よって，

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}P_1(x)e^{-x^2}dx=0\ \text{(C)}$$

である。また，(1)より，正の実数 t と 2 以上の整数 n に対し，

$$2(n-1)\int_{-t}^{t}P_{n-2}(x)e^{-x^2}dx$$
$$=\int_{-t}^{t}P_{n-1}'(x)e^{-x^2}dx$$
$$=\left[P_{n-1}(x)\cdot e^{-x^2}\right]_{-t}^{t}-\int_{-t}^{t}P_{n-1}(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right)dx$$
$$=\left(P_{n-1}(t)-P_{n-1}(-t)\right)e^{-t^2}+\int_{-t}^{t}2xP_{n-1}(x)e^{-x^2}dx$$
$$=\left(P_{n-1}(t)-P_{n-1}(-t)\right)e^{-t^2}+\int_{-t}^{t}\left\{P_n(x)+2(n-1)P_{n-2}(x)\right\}e^{-x^2}dx$$
$$=-\left(P_{n-1}(-t)-P_{n-1}(t)\right)e^{-t^2}+\int_{-t}^{t}P_n(x)e^{-x^2}dx$$
$$+2(n-1)\int_{-t}^{t}P_{n-2}(x)e^{-x^2}dx$$

より，

$$\int_{-t}^{t}P_n(x)e^{-x^2}dx=\left(P_{n-1}(-t)-P_{n-1}(t)\right)e^{-t^2}\ \text{(D)}$$

となる。よって，$P_{n-1}(t)$, $P_{n-1}(-t)$ は共に多項式であるため，

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}P_n(x)e^{-x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left(P_{n-1}(-t)-P_{n-1}(t)\right)e^{-t^2}=0\ \text{(E)}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)[別解]　20 点 (C)(D)(E)

(C) $n=1$ のときに示して‥3 点

(D)左式を示して‥10 点

(E) $n\geqq 2$ のときに示して‥7 点