２０２１年　神戸大本番レベル模試・文系・数学

解答・解説・採点基準

全３問　８０分　７５点満点

１．（２５点）

【解答・採点基準】

<table>
<tr>
<td>

(1)

条件(i)より，ℓ は傾きが 2 である C_1 の接線である必要がある。傾きが 2 である C_1 の接線を考えると，$\left(x^2\right)'=2x$ より，C_1 との接点の x 座標は $2x=2 \Leftrightarrow x=1$ と求められるから，接線は一意に定まる。したがって，ℓ は傾きが 2 である C_1 の接線であれば十分であり，その方程式は

$$y=2(x-1)+1^2$$
$$\therefore y=2x-1 \qquad \cdots(\text{答})$$

である。

(1)[別解]

ℓ の方程式を $y=2x+c$ とおくと，条件(i)より，ℓ は C_1 と接するから，x の方程式

$$x^2=2x+c$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-c=0$$

が重解をもつ。この方程式の判別式を D' とすると，c の値は

$$D'=0$$
$$\Leftrightarrow (-2)^2-4\cdot(-c)=0$$
$$\Leftrightarrow 4+4c=0$$
$$\therefore c=-1$$

</td>
<td>

(1)　5点

ℓ は傾き 2 の C_1 の接線である‥2点

(十分性の議論がなくても減点しない)

答‥3点

(1)[別解]　5点

$x^2-2x-c=0$ が重解をもつ‥2点

</td>
</tr>
</table>

と求められる。したがって，ℓ の方程式は

$$y=2x-1 \qquad \cdot\cdot\cdot(\text{答})$$

である。

答･･3 点

(2)

(2)　11 点

a, b を定数として $f(x)=x^2+ax+b$ とおくと，条件(ii)より，

$$f(-1)=1$$
$$\Leftrightarrow 1-a+b=1$$
$$\therefore a=b$$

$a=b$･･2 点

となる。条件(i)より，C_2 は ℓ に接するから，x の方程式

$$x^2+ax+a=2x-1$$
$$\Leftrightarrow x^2+(a-2)x+a+1=0 \qquad \cdot\cdot\cdot①$$

が重解をもつ。よって，①の判別式を D とすると，a の値は

①が重解をもつ･･2 点

$$D=0$$
$$\Leftrightarrow (a-2)^2-4(a+1)=0$$
$$\Leftrightarrow a^2-8a=0$$
$$\Leftrightarrow a(a-8)=0$$
$$\therefore a=0, 8$$

$a=0, 8$･･2 点

と求められる。ここで，$a=0$ のとき，$f(x)=x^2$ となり，条件(iii)に反する。$a=8$ のとき，$f(x)=x^2+8x+8$ であり，C_1 と C_2 は異なる。したがって，C_2 の方程式は

$a=0$ は不適･･2 点

$$y=x^2+8x+8 \qquad \cdot\cdot\cdot(\text{答})$$

である。

答･･3 点

(3)

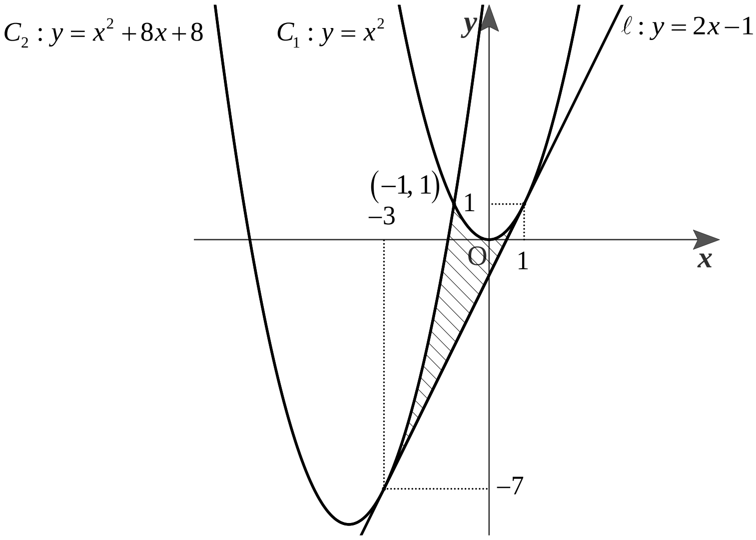
(3)　9 点

C_2 と ℓ の接点の x 座標は，$a=8$ のときの方程式①の解であるから，

$$x^2+6x+9=0$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^2=0$$
$$\therefore x=-3$$

$x=-3$ で C_2 と ℓ が接する･･2 点

と求められる。C_1 も点 $(-1, 1)$ を通り，C_1 と C_2 の交点はこの1点のみであることに注意すると，C_1, C_2, ℓ によって囲まれる領域は下図の斜線部分である。



したがって，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-3}^{-1} \left\{ x^2 + 8x + 8 - (2x-1) \right\} dx + \int_{-1}^{1} \left\{ x^2 - (2x-1) \right\} dx \\
&= \int_{-3}^{-1} \left(x^2 + 6x + 9 \right) dx + \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x + 1 \right) dx \\
&= \int_{-3}^{-1} \left(x^2 + 6x + 9 \right) dx + 2\int_{0}^{1} \left(x^2 + 1 \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x \right]_{-3}^{-1} + 2\left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{0}^{1} \\
&= \frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{16}{3} \qquad \cdot\cdot\cdot (答)
\end{aligned}
$$

である。

領域の図示あるいは曲線の上下関係を不等式で示す・・2 点

面積の立式・・2 点

答・・3 点

２． （２５点）

【解答・採点基準】

<table>
<tr>
<td>

以下 $a\times b\times c$ が3の倍数となる事象を A，$abc_{(10)}$ が6の倍数となる事象を B と表し，事象 X の起きる確率を $P(X)$ のように表す。

(1)

$a\times b\times c$ が3の倍数となる必要十分条件は $a,\ b,\ c$ のうち少なくとも1つが3の倍数となることである。その余事象「$a,\ b,\ c$ はいずれも3の倍数でない」の確率は $P(\overline{A})=\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{8}{27}$ であるから，求める確率は

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}\quad\cdot\cdot\cdot(答)$$

である。

(2)

すべての目の出方は $6^3=216$ 通りあり，これらは同様に確からしいため，以下，場合の数を考えて $P(B)$ を求める。条件は

$abc_{(10)}$ が6の倍数

$\Leftrightarrow$ $abc_{(10)}$ が2の倍数かつ3の倍数

$\Leftrightarrow$ c が2の倍数かつ $a+b+c$ が3の倍数

と言い換えられるから，$c=2,\ 4,\ 6$ に限られる。以下，c の値で場合分けして $a+b+c$ が3の倍数となる6以下の自然数の組 $\{a,\ b\}$ を調べる。

[1] $c=2$ のとき

$4\leqq a+b+c\leqq 14$

より，

$a+b+c=6,\ 9,\ 12$

$\therefore a+b=4,\ 7,\ 10$

$\therefore \{a,\ b\}=\{1,\ 3\},\ \{2,\ 2\},\ \{1,\ 6\},\ \{2,\ 5\},\ \{3,\ 4\},\ \{4,\ 6\},\ \{5,\ 5\}$

であり，この条件で順列 $(a,\ b,\ c)$ は

$5\cdot 2!+2=12$ (通り)

</td>
<td>

(1)　5点

余事象を考える方針‥2点

答‥3点

(2)　12点

c が2の倍数‥2点

$a+b+c$ が3の倍数‥2点

</td>
</tr>
</table>

ある。	$c=2$ **のとき** 12 **通り・・**2 点
[2] $c=4$ のとき $$6 \leqq a+b+c \leqq 16$$ より， $$a+b+c=6,\ 9,\ 12,\ 15$$ $$\therefore a+b=2,\ 5,\ 8,\ 11$$ $$\therefore \{a,\ b\}=\{1,\ 1\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 5\},\ \{4,\ 4\},\ \{5,\ 6\}$$ であり，この条件で順列 $(a,\ b,\ c)$ は $$5 \cdot 2!+2=12\ (\text{通り})$$ ある。	$c=4$ **のとき** 12 **通り・・**2 点
[3] $c=6$ のとき $$8 \leqq a+b+c \leqq 18$$ より， $$a+b+c=9,\ 12,\ 15,\ 18$$ $$\therefore a+b=3,\ 6,\ 9,\ 12$$ $$\therefore \{a,\ b\}=\{1,\ 2\},\ \{1,\ 5\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 3\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 5\},\ \{6,\ 6\}$$ であり，この条件で順列 $(a,\ b,\ c)$ は $$5 \cdot 2!+2=12\ (\text{通り})$$ ある。	$c=6$ **のとき** 12 **通り・・**2 点
以上, [1], [2], [3]より， $$P(B)=\frac{12+12+12}{216}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6} \quad \cdots (\text{答})$$ である。	**答・・**2 点
(2)[別解 1]	**(2)[別解 1]**　12 点
すべての目の出方は $6^3=216$ 通りあり，これらは同様に確からしいため，以下，場合の数を考えて $P(B)$ を求める。条件は $abc_{(10)}$ が 6 の倍数 $\Leftrightarrow$ $abc_{(10)}$ が 2 の倍数かつ 3 の倍数 $\Leftrightarrow$ c が 2 の倍数かつ $a+b+c$ が 3 の倍数 と言い換えられる。	c **が** 2 **の倍数・・**2 点 $a+b+c$ **が** 3 **の倍数・・**2 点
$$3 \leqq a+b+c \leqq 18$$ であるから，$a+b+c$ が 3 の倍数となるのは $$a+b+c=3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18$$	

に限られる。以下，$a+b+c$ の値で場合分けして，

$$2 \leqq a+b \leqq 12$$

に注意して，$c=2, 4, 6$ となる順列 (a, b, c) を数え上げる。

[1] $a+b+c=3$ のとき

$(a, b, c)=(1, 1, 1)$ であるから，c は 2 の倍数とならない。

$a+b+c=3$ のとき 0 通り･･1 点

[2] $a+b+c=6$ のとき

c が 2 の倍数となるのは

$$a+b=2, 4$$

$$\therefore \{a, b\}=\{1, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}$$

のときである。この条件で順列 (a, b, c) は

$$2!+2=4\ (\text{通り})$$

ある。

$a+b+c=6$ のとき 4 通り･･1 点

[3] $a+b+c=9$ のとき

c が 2 の倍数となるのは

$$a+b=3, 5, 7$$

$$\therefore \{a, b\}=\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$$

$a+b+c=9$ のとき 12 通り･･1 点

のときである。この条件で順列 (a, b, c) は

$$6\cdot 2!=12\ (\text{通り})$$

ある。

[4] $a+b+c=12$ のとき

c が 2 の倍数となるのは

$$a+b=6, 8, 10$$

$a+b+c=12$ のとき 13 通り･･1 点

$$\therefore \{a,b\}=\{1,5\}, \{2,4\}, \{3,3\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{4,4\}, \{4,6\}, \{5,5\}$$

のときである。この条件で順列 (a, b, c) は

$$5\cdot 2!+3=13\ (\text{通り})$$

ある。

[5] $a+b+c=15$ のとき

c が 2 の倍数となるのは

$$a+b=9, 11$$

$$\therefore \{a, b\}=\{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}$$

$a+b+c=15$ のとき 6 通り･･1 点

のときである。この条件で順列 (a, b, c) は

$$3\cdot 2!=6\ (\text{通り})$$

ある。

[6]　$a+b+c=18$ のとき

$(a, b, c)=(6, 6, 6)$ の1通りのみ条件を満たす。

以上, [1]~[6]より,

$$P(B)=\frac{4+12+13+6+1}{216}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6} \quad ・・・(答)$$

である。

(2)[別解 2]

すべての目の出方は $6^3=216$ 通りあり，これらは同様に確からしいため，以下，場合の数を考えて $P(B)$ を求める。条件は

$abc_{(10)}$ が 6 の倍数

$\Leftrightarrow$ $abc_{(10)}$ が 2 の倍数かつ 3 の倍数

$\Leftrightarrow$ $c\equiv 0 \pmod 2$ かつ $a+b+c\equiv 0 \pmod 3$

と言い換えられる。

$R_0=\{3, 6\}$, $R_1=\{1, 4\}$, $R_2=\{2, 5\}$

と 3 で割った余りで分けた集合を考える。$a+b+c\equiv 0 \pmod 3$ となるのは次のどちらかの場合である。

[1]　a, b, c が全て同じ $R_i\ (i=0, 1, 2)$ に属する。

[2]　a, b, c がそれぞれ異なる $R_i\ (i=0, 1, 2)$ に属する。

[1]のとき

$c\equiv 0 \pmod 2$ となるのは，i の選び方が 3 通り，a, b がそれぞれ 2 通り，c が 1 通りあるため，合わせて

$3\cdot 2^2=12$ (通り)

となる。

[2]のとき

$c\equiv 0 \pmod 2$ となるのは，i の選び方が $3!$ 通り，a, b がそれぞれ 2 通り，c が 1 通りあるため，合わせて

$3!\cdot 2^2=24$ (通り)

となる。

以上より,

$$P(B)=\frac{12+24}{216}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6} \quad ・・・(答)$$

である。

(3)

$a+b+c=18$ のとき 1 通り‥1 点

答‥2 点

(2)[別解 2]　12 点

$c\equiv 0 \pmod 2$ ‥2 点

$a+b+c\equiv 0 \pmod 3$ ‥2 点

[1]のとき 12 通り‥3 点

[2]のとき 24 通り‥3 点

答‥2 点

(3)　8 点

求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

である。$abc_{(10)}$ が 6 の倍数かつ $a\times b\times c$ が 3 の倍数となる確率 $P(A\cap B)$ を求める。(2)の場合分け[1], [2], [3]で考えた a, b, c の組のうち 3 の倍数を含まないものは,

$c=2$ のとき $\{a, b\}=\{2, 2\}, \{2, 5\}, \{5, 5\}$

$c=4$ のとき $\{a, b\}=\{1, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 4\}$

であり,

$2\cdot 2!+4=8$ (通り)

ある。よって,

$$P(A\cap B)=P(B)-P(\overline{A}\cap B)=\frac{36-8}{216}=\frac{28}{216}$$

である。以上より, (2)の結果も用いて, 求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{28}{216}}{\frac{36}{216}}=\frac{7}{9}\quad ・・・(答)$$

となる。

(3)[別解] ((2)[別解 2]の続き)

求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

である。$abc_{(10)}$ が 6 の倍数かつ $a\times b\times c$ が 3 の倍数となる確率 $P(A\cap B)$ を求める。(2)[別解 2]の場合分け[1], [2]で考えた a, b, c の組のうち 3 の倍数を含まないものは,

[1]のとき

i の選び方が R_0 以外の 2 通り, a, b がそれぞれ 2 通り, c が 1 通りあるため, 合わせて

$2\cdot 2^2=8$ (通り)

となる。

[2]のとき

常に R_0 から選ばれるため 0 通りとなる。

よって,

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

を求める方針

・・2 点

$$P(A\cap B)=\frac{28}{216}$$

・・4 点

答・・2 点

(3)[別解]　8 点

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

を求める方針

・・2 点

$$P(A\cap B)=P(B)-P(\overline{A}\cap B)=\frac{36-8}{216}=\frac{28}{216}$$

である。以上より, (2)の結果も用いて, 求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{28}{216}}{\frac{36}{216}}=\frac{7}{9} \quad ・・・(答)$$

となる。

$P(A\cap B)=\dfrac{28}{216}$

・・4 点

答・・2 点

[注] 「A : $abc_{(10)}$ が 6 の倍数」「B : $a\times b\times c$ が 3 の倍数」の全列挙

塗りつぶし : A　○ : B

		c																	
		2						4						6					
		a						a						a					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
b	1			○			○			○			○	○	○	○	○	○	○
	2			○			○			○			○	○	○	○	○	○	○
	3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	4			○			○			○			○	○	○	○	○	○	○
	5			○			○			○			○	○	○	○	○	○	○
	6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

		c																	
		1						3						5					
		a						a						a					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
b	1			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	2			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	4			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	5			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

３．（２５点）

【解答・採点基準】

(1)

題意より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ であるから，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0\\ \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ \left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{c}\cdot\vec{a}=\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}\\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}\end{cases}$$

$$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=-2,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{5}{3}$$ ・・・(答)

と求められる。

(2)

△ ABC の各辺の長さを求めると，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2=49$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{b}\right|^2=36$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2=\left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+\left|\vec{c}\right|^2=25$$

より，$\mathrm{AB}=7,\ \mathrm{BC}=6,\ \mathrm{CA}=5$ である。余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot7\cdot6}=\frac{5}{7}$$

であり，$0<\angle\mathrm{ABC}<\pi$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

(1)　6 点

答・・6 点

(各 3 点×2)

(2)　8 点

△ ABC の 3 つの辺の長さを求める・・2 点

となる。したがって，△ ABC の面積は

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{BC}\cdot \sin\angle \mathrm{ABC}=6\sqrt{6} \qquad \cdots (答)$$

と求められる。また，△ ABC の内接円の半径を r とすると

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$

が成り立つから，△ ABC の内接円の半径は

$$r=\frac{2\cdot 6\sqrt{6}}{7+6+5}=\frac{2\sqrt{6}}{3} \qquad \cdots (答)$$

である。

(2)[別解]

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=49$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=25$$

より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=7,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=5$ である。また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2\\&=19\end{aligned}$$

であるから，△ ABC の面積は

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=6\sqrt{6} \qquad \cdots (答)$$

と求められる。さらに，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=36$$

より，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$ であり，△ ABC の内接円の半径を r とすると

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}r\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\right)$$

が成り立つから，△ ABC の内接円の半径は

$$r=\frac{2\cdot 6\sqrt{6}}{7+6+5}=\frac{2\sqrt{6}}{3} \qquad \cdots (答)$$

である。

△ ABC の面積 ‥3 点

内接円の半径 ‥3 点

(2)[別解]　8 点

△ ABC の 2 つの辺の長さと内積を求める‥2 点

△ ABC の面積 ‥3 点

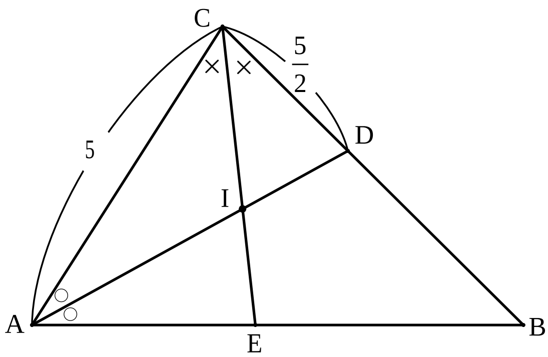
内接円の半径 ‥3 点

(3)

内心は三角形の3つの内角の二等分線の交点である。∠BACの二等分線と辺BCとの交点をDとすると，角の二等分線の性質より

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=7:5$$

であるから，$\mathrm{CD}=\dfrac{5}{12}\mathrm{BC}=\dfrac{5}{2}$ と分かる。



△CADにおいて，線分CIは∠ACDの二等分線であるから，

$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{CA}:\mathrm{CD}=5:\dfrac{5}{2}=2:1$ となる。したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{7}{18}\vec{c}\end{aligned}$$

・・・(答)

である。ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{18}\vec{b}+\frac{1}{18}\vec{c}=\frac{1}{18}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{HI}}\right|=\dfrac{1}{18}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\dfrac{1}{3}$ であり，$\dfrac{1}{3}<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ より，点Hは平面ABC上で△ABCの内接円の内部にある。

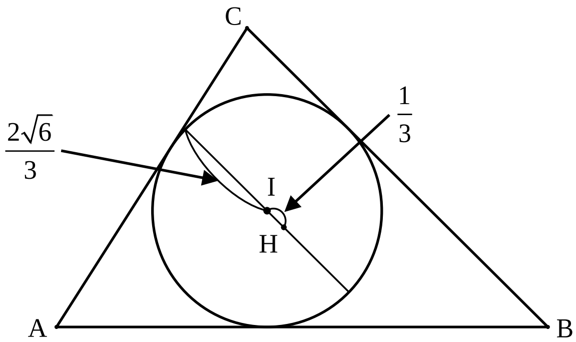
(3)　11点

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ ‥**5点**

$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\dfrac{1}{18}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ‥**2点**

点Hが△ABCの内接円の内部にある

‥2点



$\left|\overrightarrow{HP}\right|$が最小となるとき，3 点 I, H, P がこの順に一直線上に並び,

$\left|\overrightarrow{HP}\right|=\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{3}$ である。$\left|\overrightarrow{HP}\right|$が最大となるとき，3 点 H, I, P がこの順に一直線上に並び，$\left|\overrightarrow{HP}\right|=\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{1}{3}$ である。したがって，$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{2\sqrt{6}-1}{3} \leqq \left|\overrightarrow{HP}\right| \leqq \frac{2\sqrt{6}+1}{3} \quad \cdot\cdot\cdot(答)$$

である。

$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ のとりうる値の範囲‥2 点

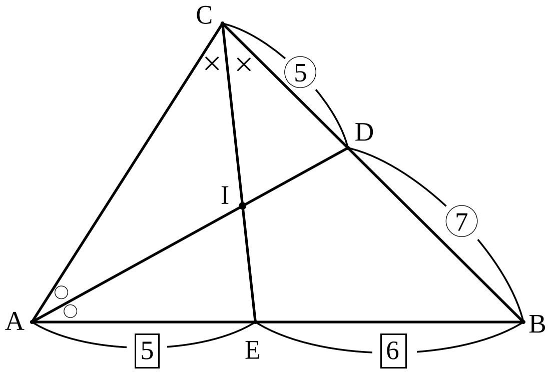
(3)[別解]

(3)［別解］　11 点

内心は三角形の 3 つの内角の二等分線の交点である。∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D，∠ACB の二等分線と辺 AB との交点を E とすると，角の二等分線の性質より

$$BD:DC=AB:CA=7:5$$
$$AE:EB=CA:BC=5:6$$

と分かる。



△ ABC の内心 I は 2 つの線分 AD, CE 上にあるから，k, l を実数として

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AI}} = k\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ \overrightarrow{\mathrm{AI}} = l\overrightarrow{\mathrm{AE}} + (1-l)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{5}{12}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{7}{12}k\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{5}{11}l\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-l)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \end{cases}$$

と表せ，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は平行でないから

$$\begin{cases} \dfrac{5}{12}k = \dfrac{5}{11}l \\ \dfrac{7}{12}k = 1-l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{3} \\ l = \dfrac{11}{18} \end{cases}$$

と求められる。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{5}{18}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{7}{18}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{5}{18}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \frac{7}{18}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{18}\vec{b} + \frac{7}{18}\vec{c}$$ ・・・(答)

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ ・・5 点

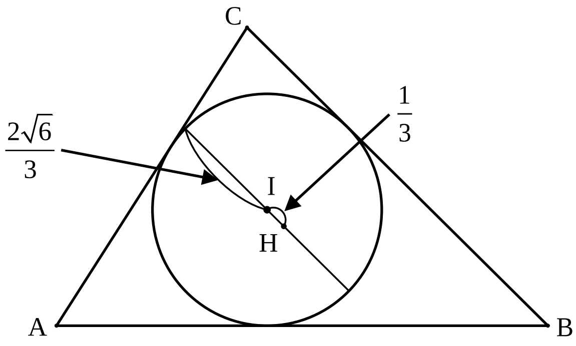
である。ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = -\frac{1}{18}\vec{b} + \frac{1}{18}\vec{c} = \frac{1}{18}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{HI}}\right| = \dfrac{1}{18}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \dfrac{1}{3}$ であり，$\dfrac{1}{3} < \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ より，点 H は平面

$\overrightarrow{\mathrm{HI}} = \dfrac{1}{18}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ・・2 点

ABC 上で△ ABC の内接円の内部にある。



$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ が最小となるとき，3 点 I, H, P がこの順に一直線上に並び，

$\left|\overrightarrow{HP}\right| = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{3}$ である。$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ が最大となるとき，3 点 H, I, P がこの順に一直線上に並び，$\left|\overrightarrow{HP}\right| = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{3}$ である。したがって，$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{2\sqrt{6}-1}{3} \leqq \left|\overrightarrow{HP}\right| \leqq \frac{2\sqrt{6}+1}{3} \quad \cdot\cdot\cdot(答)$$

である。

点 H が△ ABC の内接円の内部にある･･2 点

$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ のとりうる値の範囲･･2 点