２０２１年　神戸大本番レベル模試・理系・数学

解答・解説・採点基準

全５問　１２０分　１５０点満点

１．（３０点）

【解答・採点基準】

(1)

$\{x \mid x$ は $y=x^3-24x$ と $y=3x^2+k$ の共有点の x 座標$\}$

$=\{x \mid x^3-24x=3x^2+k$ かつ x は実数$\}$

$=\{x \mid x^3-3x^2-24x=k$ かつ x は実数$\}$

$=\{x \mid x$ は $y=x^3-3x^2-24x$ と $y=k$ の共有点の x 座標$\}$

である。よって，

$$f(x)=x^3-3x^2-24x$$

とおき $y=f(x)$ と $y=k$ が共有点を3個持つような k の範囲を求めればよい。

$$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$$

であるから $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f(4)=4^3-3\cdot 4^2-24\cdot 4=-80$$

$$f(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)^2-24\cdot(-2)=28$$

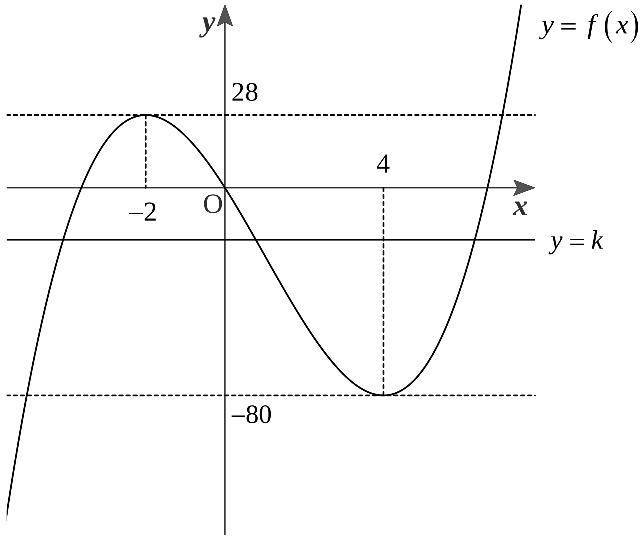
にも注意して $y=f(x)$ と $y=k$ を図示すると下図のようになる。

(1)　8点

直線と3次関数のグラフの共有点の個数に関する条件に言い換える
・・2点

導関数を因数分解した形 or $f'(x)=0$ の解を求める
・・2点

増減表・・2点



上図より $y=f(x)$ と $y=k$ が共有点を 3 個持つような k の範囲は

$-80<k<28$　　　　　　　・・・(答)

である。

答‥2 点

(2)

(2)　6 点

被積分関数を $(x-a)^n\ (n=1,\ 2,\ 3)$ の項に分解する方針(1/6 公式は前提として良い。$n=1$ はなくても可。)

‥2 点

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\,dx \\
&=\int_a^b (x-a)(x-b)\{(x-a)+(a-c)\}\,dx \\
&=\int_a^b \{(x-a)^2(x-b)+(x-a)(x-b)(a-c)\}\,dx \\
&=\int_a^b (x-a)^2\{(x-a)+(a-b)\}\,dx+(a-c)\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx \\
&=\int_a^b \{(x-a)^3+(a-b)(x-a)^2\}\,dx-\frac{(a-c)}{6}(b-a)^3 \\
&=\left[\frac{1}{4}(x-a)^4-\frac{1}{3}(b-a)(x-a)^3\right]_a^b-\frac{(a-c)}{6}(b-a)^3 \\
&=-\frac{1}{12}(b-a)^4-\frac{(a-c)}{6}(b-a)^3
\end{aligned}
$$

より成立する。

(証明終)

証明完了‥4 点

(2)[別解]

(2)［別解］6 点

展開して比較する。左辺について

$$\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\,dx$$
$$=\int_a^b \left\{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+b+c)x^3+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)x^2-abcx\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{4}\left(b^4-a^4\right)-\frac{1}{3}(a+b+c)\left(b^3-a^3\right)$$
$$+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\left(b^2-a^2\right)-abc(b-a)$$
$$=\frac{1}{4}b^4-\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}ab^3-\frac{1}{3}b^4-\frac{1}{3}b^3c+\frac{1}{3}a^4+\frac{1}{3}a^3b+\frac{1}{3}a^3c$$
$$+\frac{1}{2}ab^3+\frac{1}{2}b^3c+\frac{1}{2}ab^2c-\frac{1}{2}a^3b-\frac{1}{2}a^2bc-\frac{1}{2}a^3c$$
$$-ab^2c+a^2bc$$
$$=-\frac{1}{12}b^4+\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{6}ab^3+\frac{1}{6}b^3c-\frac{1}{6}a^3b-\frac{1}{6}a^3c$$
$$-\frac{1}{2}ab^2c+\frac{1}{2}a^2bc$$

左辺を展開‥3 点

となる。右辺について

$$-\frac{1}{12}(b-a)^4-\frac{(a-c)}{6}(b-a)^3$$
$$=-\frac{1}{12}\left(b^4-4b^3a+6b^2a^2-4ba^3+a^4\right)$$
$$-\frac{(a-c)}{6}\left(b^3-3b^2a+3ba^2-a^3\right)$$
$$=-\frac{1}{12}b^4+\frac{1}{3}ab^3-\frac{1}{2}a^2b^2+\frac{1}{3}a^3b-\frac{1}{12}a^4$$
$$-\frac{1}{6}\left(ab^3-3a^2b^2+3a^3b-a^4-b^3c+3ab^2c-3a^2bc+a^3c\right)$$
$$=-\frac{1}{12}b^4+\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{6}ab^3+\frac{1}{6}b^3c-\frac{1}{6}a^3b-\frac{1}{6}a^3c$$
$$-\frac{1}{2}ab^2c+\frac{1}{2}a^2bc$$

右辺を展開‥3 点

となり問題文の等式は成立する。

(証明終)

(3)

(3)　16 点

$y=x^3-24x$ と $y=3x^2+k$ のグラフの上下関係を考えるために

$$x^3-24x-\left(3x^2+k\right)$$

の符号を考える。α,β,γ は $x^3-24x-\left(3x^2+k\right)=0$ の解であるから,

$$x^3-24x-\left(3x^2+k\right)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解できる。ゆえに,

$$\alpha \leqq x \leqq \beta \text{ において } x^3-24x \geqq 3x^2+k$$

グラフの上下関係を示す(図示でも可)‥2 点

$\beta \leqq x \leqq \gamma$ において $3x^2+k \geqq x^3-24x$

となる。以上より

$$\int_\alpha^\beta \left\{x^3-24x-\left(3x^2+k\right)\right\}dx=\int_\beta^\gamma \left\{3x^2+k-\left(x^3-24x\right)\right\}dx$$

問題文の条件を定積分で表す・・2 点

が成立するときの k を求めればよい。上式を整理すると

$$\int_\alpha^\beta \left\{x^3-24x-\left(3x^2+k\right)\right\}dx=\int_\beta^\gamma \left\{3x^2+k-\left(x^3-24x\right)\right\}dx$$

$$\therefore \int_\alpha^\gamma \left\{x^3-24x-\left(3x^2+k\right)\right\}dx=0$$

$$\therefore \int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx=0$$

$$\therefore -\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^4-\frac{(\alpha-\beta)}{6}(\gamma-\alpha)^3=0$$

$$\therefore (\gamma-\alpha)+2(\alpha-\beta)=0 \quad (\because \gamma-\alpha\neq 0)$$

(2)の結果の利用・・2 点

$$\therefore \gamma+\alpha=2\beta \qquad \cdots①$$

①・・2 点

を得る。また，$x^3-3x^2-24x-k=0$ についての解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=3 \qquad \cdots②$$

②・・2 点

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-24 \qquad \cdots③$$

$$\alpha\beta\gamma=k \qquad \cdots④$$

が成立する。①，②より

$$\beta=1 \qquad \cdots⑤$$

⑤・・2 点

$$\alpha+\gamma=2 \qquad \cdots⑥$$

を得る。③，⑤，⑥より

$$\alpha\gamma=-26 \qquad \cdots⑦$$

であるから，④，⑤，⑦より

$$k=-26 \qquad \cdots(\text{答})$$

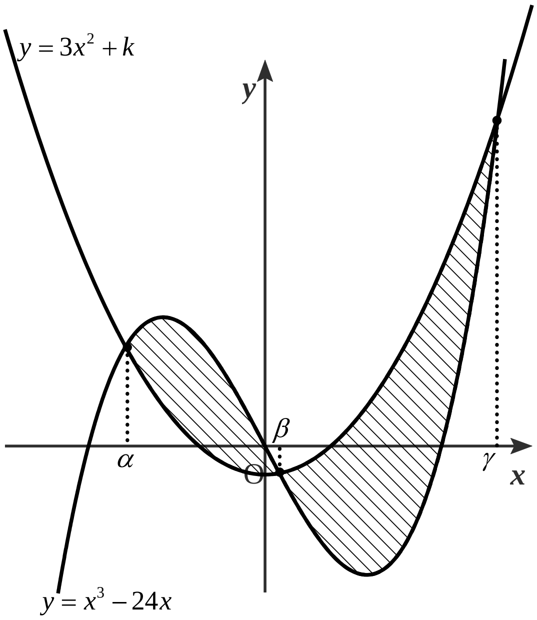
答・・4 点

を得る。これは確かに $-80<k<28$ を満たす。

(3)[別解 1]

(3)［別解 1］16 点

$y=x^3-24x$ と $y=3x^2+k$ のグラフを図示すると下図のようになる。



よって，2つの囲まれた領域の内，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の部分の面積と $\beta \leqq x \leqq \gamma$ の部分の面積が一致するならば

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left\{x^3-24x-\left(3x^2+k\right)\right\}dx=\int_{\beta}^{\gamma}\left\{3x^2+k-\left(x^3-24x\right)\right\}dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\gamma}\left(x^3-3x^2-24x-k\right)dx=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{4}x^4-x^3-12x^2-kx\right]_{\alpha}^{\gamma}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\gamma^4-\gamma^3-12\gamma^2-k\gamma=\frac{1}{4}\alpha^4-\alpha^3-12\alpha^2-k\alpha \quad \cdot\cdot\cdot ⑧$$

が成立する。α は $x^3-3x^2-24x=k$ の実数解であるから $\alpha^3-3\alpha^2-24\alpha=k$ を満たし，

$$\alpha^3=3\alpha^2+24\alpha+k$$

$$\begin{aligned}\alpha^4&=\alpha\left(3\alpha^2+24\alpha+k\right)\\&=3\left(3\alpha^2+24\alpha+k\right)+24\alpha^2+k\alpha\\&=33\alpha^2+\left(72+k\right)\alpha+3k\end{aligned}$$

となる。同様に

$$\gamma^3=3\gamma^2+24\gamma+k$$

$$\gamma^4=33\gamma^2+\left(72+k\right)\gamma+3k$$

が成立する。⑧の両辺をそれぞれ γ, α の2次以下の式に変形すると

グラフの上下関係を示す‥2点

問題文の条件を定積分で表す‥2点

次数を下げる方針‥2点

$$\frac{1}{4}\gamma^4-\gamma^3-12\gamma^2-k\gamma=\frac{1}{4}\alpha^4-\alpha^3-12\alpha^2-k\alpha$$
$$\therefore -\frac{27}{4}\gamma^2-\left(\frac{3}{4}k+6\right)\gamma-\frac{1}{4}k=-\frac{27}{4}\alpha^2-\left(\frac{3}{4}k+6\right)\alpha-\frac{1}{4}k$$
$$\therefore (\alpha-\gamma)\left\{\frac{27}{4}(\alpha+\gamma)+\left(\frac{3}{4}k+6\right)\right\}=0$$
$$\therefore \alpha+\gamma=-\frac{1}{9}k-\frac{8}{9}\ (\because \alpha\neq\gamma)$$

$\alpha+\gamma=-\frac{1}{9}k-\frac{8}{9}$ ‥**2 点**

を得る。$x^3-3x^2-24x-k=0$ についての解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=3$$

$\alpha+\beta+\gamma=3$ ‥**2 点**

が成立するから

$$\beta=\frac{1}{9}k+\frac{35}{9}\Leftrightarrow k=9\beta-35$$

となる。一方，$\beta^3-3\beta^2-24\beta=k$ を満たすから k を消去して

$$\beta^3-3\beta^2-33\beta+35=0$$
$$\therefore (\beta-1)(\beta^2-2\beta-35)=0$$
$$\therefore (\beta-1)(\beta-7)(\beta+5)=0$$
$$\therefore \beta=1\ (\because \alpha<-2<\beta<4<\gamma)$$

$\beta=1$ ‥**2 点**

であり

$k=-26$ ・・・(答)

答‥**4 点**

を得る。これは確かに $-80<k<28$ を満たす。

(3)[別解 2]

(3)［別解 2］16 点

$y=x^3-24x$ と $y=3x^2+k$ のグラフの上下関係を考えるために

$$x^3-24x-(3x^2+k)$$

の符号を考える。α, β, γ は $x^3-24x-(3x^2+k)=0$ の解であるから，

$$x^3-24x-(3x^2+k)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解できる。ゆえに，

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において $x^3-24x\geqq 3x^2+k$

$\beta\leqq x\leqq\gamma$ において $3x^2+k\geqq x^3-24x$

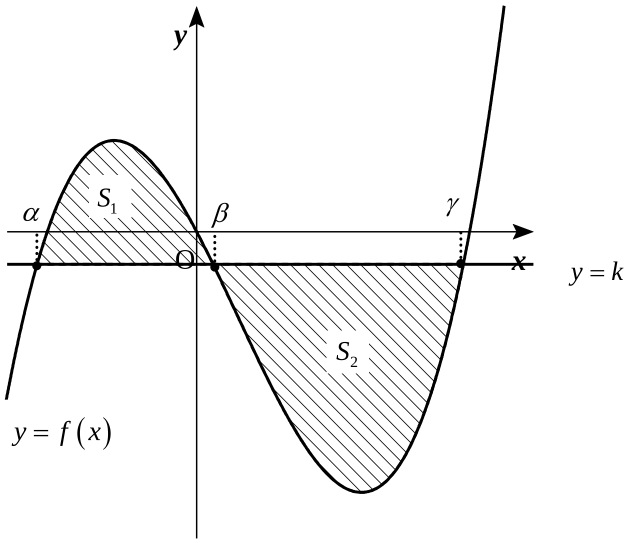
グラフの上下関係を示す(図示でも可)‥2 点

となる。以上より

$$\int_\alpha^\beta\left\{x^3-24x-(3x^2+k)\right\}dx=\int_\beta^\gamma\left\{3x^2+k-(x^3-24x)\right\}dx$$
$$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta\{f(x)-k\}dx=\int_\beta^\gamma\{k-f(x)\}dx$$

問題文の条件を定積分で表す‥2 点

が成立する，すなわち下図の 2 つの囲まれた領域の面積 S_1, S_2 が一致するときの k を求めればよい。



ここで $y=f(x)$ のグラフが変曲点に関して点対称であることを示す。変曲点の座標は

$$f(x)=x^3-3x^2-24x$$
$$f'(x)=3x^2-6x-24$$
$$f''(x)=6x-6$$

より $(1,\ f(1))=(1,\ -26)$ である。よって，

$$\begin{aligned}&f(1+x)-(-26)\\&=(1+x)^3-3(1+x)^2-24(1+x)+26\\&=x^3+3x^2+3x+1-3x^2-6x-3-24x-24+26\\&=x^3-27x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\{f(1-x)-(-26)\}\\&=-(1-x)^3+3(1-x)^2+24(1-x)-26\\&=x^3-3x^2+3x-1+3x^2-6x+3+24-24x-26\\&=x^3-27x\end{aligned}$$

$$\therefore\ f(1+x)-(-26)=-\{f(1-x)-(-26)\}$$

より，$y=f(x)$ のグラフは $(1,\ -26)$ に関して点対称である。したがって，対称性より直線 $y=k$ が $(1,\ -26)$ を通るとき，すなわち $k=-26$ のとき $S_1=S_2$ となる。また，$-80<k<28$ の範囲において，k の増加に伴い，S_1 は連続かつ単調に減少し，S_2 は連続かつ単調に増加するから，$S_1=S_2$ となるのは

$k=-26$ ・・・(答)

のときのみである。

3 次関数のグラフが変曲点に関して点対称であることを示す・・6 点

対称性より $k=-26$ ならば $S_1=S_2$ ・・4 点

$k=-26$ のみであることを示す・・2 点

２．　（３０点）

【解答・採点基準】

以下 $a\times b\times c$ が3の倍数となる事象を A，$abc_{(10)}$ が6の倍数となる事象を B と表し，事象 X の起きる確率を $P(X)$ のように表す。	
(1)	(1)　6点
$a\times b\times c$ が3の倍数となる必要十分条件は a, b, c のうち少なくとも1つが3の倍数となることである。その余事象「a, b, c はいずれも3の倍数でない」の確率は $P(\overline{A})=\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{8}{27}$ であるから，求める確率は	余事象を考える方針‥2点
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$ ・・・（答） である。	答‥4点
(2)	(2)　14点
すべての目の出方は $6^3=216$ 通りあり，これらは同様に確からしいため，以下，場合の数を考えて $P(B)$ を求める。条件は $abc_{(10)}$ が6の倍数 $\Leftrightarrow$ $abc_{(10)}$ が2の倍数かつ3の倍数 $\Leftrightarrow$ c が2の倍数かつ $a+b+c$ が3の倍数	c が2の倍数‥2点 $a+b+c$ が3の倍数‥2点
と言い換えられるから，$c=2, 4, 6$ に限られる。以下，c の値で場合分けして $a+b+c$ が3の倍数となる6以下の自然数の組 $\{a, b\}$ を調べる。	
[1]　$c=2$ のとき $4 \leqq a+b+c \leqq 14$ より， $a+b+c=6, 9, 12$ $\therefore a+b=4, 7, 10$ $\therefore \{a, b\}=\{1, 3\}, \{2, 2\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}$ であり，この条件で順列 (a, b, c) は $5\cdot 2!+2=12$ (通り)	$c=2$ のとき12通り‥2点

ある。

[2]　$c=4$ のとき

$$6 \leqq a+b+c \leqq 16$$

より，

$$a+b+c=6,\ 9,\ 12,\ 15$$
$$\therefore a+b=2,\ 5,\ 8,\ 11$$

$$\therefore \{a,\ b\}=\{1,\ 1\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 5\},\ \{4,\ 4\},\ \{5,\ 6\}$$

$c=4$ のとき 12 通り‥2 点

であり，この条件で順列 $(a,\ b,\ c)$ は

$$5\cdot 2!+2=12\ (\text{通り})$$

ある。

[3]　$c=6$ のとき

$$8 \leqq a+b+c \leqq 18$$

より，

$$a+b+c=9,\ 12,\ 15,\ 18$$
$$\therefore a+b=3,\ 6,\ 9,\ 12$$

$$\therefore \{a,\ b\}=\{1,\ 2\},\ \{1,\ 5\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 3\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 5\},\ \{6,\ 6\}$$

であり，この条件で順列 $(a,\ b,\ c)$ は

$$5\cdot 2!+2=12\ (\text{通り})$$

$c=6$ のとき 12 通り‥2 点

ある。

以上, [1], [2], [3]より，

$$P(B)=\frac{12+12+12}{216}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6} \qquad ・・・（答）$$

答‥4 点

である。

(2)[別解 1]

(2)[別解 1]　14 点

すべての目の出方は $6^3=216$ 通りあり，これらは同様に確からしいため，以下，場合の数を考えて $P(B)$ を求める。条件は

$abc_{(10)}$ が 6 の倍数

$\Leftrightarrow$ $abc_{(10)}$ が 2 の倍数かつ 3 の倍数

$\Leftrightarrow$ c が 2 の倍数かつ $a+b+c$ が 3 の倍数

c が 2 の倍数‥2 点

$a+b+c$ が 3 の倍数‥2 点

と言い換えられる。

$$3 \leqq a+b+c \leqq 18$$

であるから，$a+b+c$ が 3 の倍数となるのは

$$a+b+c=3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18$$

に限られる。以下，$a+b+c$ の値で場合分けして，

$$2 \leqq a+b \leqq 12$$

に注意して，$c=2,\ 4,\ 6$ となる順列 $(a,\ b,\ c)$ を数え上げる。

[1] $a+b+c=3$ のとき

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$ であるから，c は 2 の倍数とならない。

$a+b+c=3$ のとき 0 通り・・1 点

[2] $a+b+c=6$ のとき

c が 2 の倍数となるのは

$$a+b=2,\ 4$$

$$\therefore \{a,\ b\}=\{1,\ 1\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 2\}$$

のときである。この条件で順列 $(a,\ b,\ c)$ は

$$2!+2=4\ (\text{通り})$$

ある。

$a+b+c=6$ のとき 4 通り・・1 点

[3] $a+b+c=9$ のとき

c が 2 の倍数となるのは

$$a+b=3,\ 5,\ 7$$

$$\therefore \{a,\ b\}=\{1,\ 2\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 6\},\ \{2,\ 5\},\ \{3,\ 4\}$$

のときである。この条件で順列 $(a,\ b,\ c)$ は

$$6\cdot 2!=12\ (\text{通り})$$

ある。

$a+b+c=9$ のとき 12 通り・・1 点

[4] $a+b+c=12$ のとき

c が 2 の倍数となるのは

$$a+b=6,\ 8,\ 10$$

$$\therefore \{a,b\}=\{1,5\},\ \{2,4\},\ \{3,3\},\ \{2,6\},\ \{3,5\},\ \{4,4\},\ \{4,6\},\ \{5,5\}$$

のときである。この条件で順列 $(a,\ b,\ c)$ は

$$5\cdot 2!+3=13\ (\text{通り})$$

ある。

$a+b+c=12$ のとき 13 通り・・1 点

[5] $a+b+c=15$ のとき

c が 2 の倍数となるのは

$$a+b=9,\ 11$$

$$\therefore \{a,\ b\}=\{3,\ 6\},\ \{4,\ 5\},\ \{5,\ 6\}$$

のときである。この条件で順列 $(a,\ b,\ c)$ は

$$3\cdot 2!=6\ (\text{通り})$$

ある。

$a+b+c=15$ のとき 6 通り・・1 点

[6]　$a+b+c=18$ のとき

$(a,b,c)=(6,6,6)$ の1通りのみ条件を満たす。

以上, [1]~[6]より,

$$P(B)=\frac{4+12+13+6+1}{216}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}\quad\cdots(\text{答})$$

である。

$a+b+c=18$ のとき1通り‥1点

答‥4点

(2)[別解2]

(2)[別解2]　14点

すべての目の出方は $6^3=216$ 通りあり，これらは同様に確からしいため，以下，場合の数を考えて $P(B)$ を求める。条件は

$abc_{(10)}$ が6の倍数

$\Leftrightarrow abc_{(10)}$ が2の倍数かつ3の倍数

$\Leftrightarrow c\equiv 0 \pmod 2$ かつ $a+b+c\equiv 0 \pmod 3$

と言い換えられる。

$c\equiv 0 \pmod 2$ ‥2点

$a+b+c\equiv 0 \pmod 3$ ‥2点

$$R_0=\{3,6\},\ R_1=\{1,4\},\ R_2=\{2,5\}$$

と3で割った余りで分けた集合を考える。$a+b+c\equiv 0 \pmod 3$ となるのは次のどちらかの場合である。

[1]　a,b,c が全て同じ $R_i\ (i=0,1,2)$ に属する。

[2]　a,b,c がそれぞれ異なる $R_i\ (i=0,1,2)$ に属する。

[1]のとき

$c\equiv 0 \pmod 2$ となるのは，i の選び方が3通り，a,b がそれぞれ2通り，c が1通りあるため，合わせて

$3\cdot 2^2=12$ (通り)

となる。

[1]のとき12通り‥3点

[2]のとき

$c\equiv 0 \pmod 2$ となるのは，i の選び方が $3!$ 通り，a,b がそれぞれ2通り，c が1通りあるため，合わせて

$3!\cdot 2^2=24$ (通り)

となる。

[2]のとき24通り‥3点

以上より,

$$P(B)=\frac{12+24}{216}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}\quad\cdots(\text{答})$$

である。

答‥4点

(3)

(3)　10点

求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

である。 $abc_{(10)}$ が 6 の倍数かつ $a\times b\times c$ が 3 の倍数となる確率 $P(A\cap B)$ を求める。(2)の場合分け[1], [2], [3]で考えた a, b, c の組のうち 3 の倍数を含まないものは,

$c=2$ のとき $\{a, b\}=\{2, 2\}, \{2, 5\}, \{5, 5\}$

$c=4$ のとき $\{a, b\}=\{1, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 4\}$

であり,

$2\cdot 2!+4=8$ (通り)

ある。よって,

$$P(A\cap B)=P(B)-P(\overline{A}\cap B)=\frac{36-8}{216}=\frac{28}{216}$$

である。以上より, (2)の結果も用いて，求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{28}{216}}{\frac{36}{216}}=\frac{7}{9}\qquad \cdot\cdot\cdot\text{(答)}$$

となる。

(3)[別解] ((2)[別解 2]の続き)

求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

である。 $abc_{(10)}$ が 6 の倍数かつ $a\times b\times c$ が 3 の倍数となる確率 $P(A\cap B)$ を求める。(2)[別解 2]の場合分け[1], [2]で考えた a, b, c の組のうち 3 の倍数を含まないものは,

[1]のとき

i の選び方が R_0 以外の 2 通り，a, b がそれぞれ 2 通り，c が 1 通りあるため，合わせて

$2\cdot 2^2=8$ (通り)

となる。

[2]のとき

常に R_0 から選ばれるため 0 通りとなる。

よって,

$P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

を求める方針

··2 点

$P(A\cap B)=\dfrac{28}{216}$

··4 点

答··4 点

(3)[別解]　10 点

$P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

を求める方針

··2 点

$$P(A\cap B)=P(B)-P(\overline{A}\cap B)=\frac{36-8}{216}=\frac{28}{216}$$

である。以上より, (2)の結果も用いて, 求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{28}{216}}{\frac{36}{216}}=\frac{7}{9}\qquad\cdot\cdot\cdot(答)$$

となる。

$P(A\cap B)=\dfrac{28}{216}$

・・4 点

答・・4 点

[注] 「$A: abc_{(10)}$ が 6 の倍数」「$B: a\times b\times c$ が 3 の倍数」の全列挙

塗りつぶし：A　○：B

		c																	
		2						4						6					
		a						a						a					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
b	1			■○			■○	■		○	■		○	○	■○	○	○	■○	○
	2		■	○		■	○			■○			■○	■○	○	○	■○	○	○
	3	■○	○	○	■○	○	○	○	■○	○	○	■○	○	○	○	■○	○	○	■○
	4			■○			■○	■		○	■		○	○	■○	○	○	■○	○
	5		■	○		■	○			■○			■○	■○	○	○	■○	○	○
	6	■○	○	○	■○	○	○	○	■○	○	○	■○	○	○	○	■○	○	○	■○

		c																	
		1						3						5					
		a						a						a					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
b	1			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	2			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	4			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	5			○			○	○	○	○	○	○	○			○			○
	6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

３．（３０点）

【解答・採点基準】

(1)

題意より，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ である。$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{CA}$ であるから，

$$\begin{cases}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0\\ \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ \left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{c}\cdot\vec{a}=\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}\\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}\end{cases}$$

$$\therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=-2,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{5}{3}$$ ・・・(答)

と求められる。

(2)

△ABC の各辺の長さを求めると，

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2=49$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{b}\right|^2=36$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right|^2=\left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+\left|\vec{c}\right|^2=25$$

より，$AB=7, BC=6, CA=5$ である。余弦定理より

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot7\cdot6}=\frac{5}{7}$$

であり，$0<\angle ABC<\pi$ であるから

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

(1)　6点

答・・6点

(各3点×2)

(2)　9点

△ABC の 3 つの辺の長さを求める・・3点

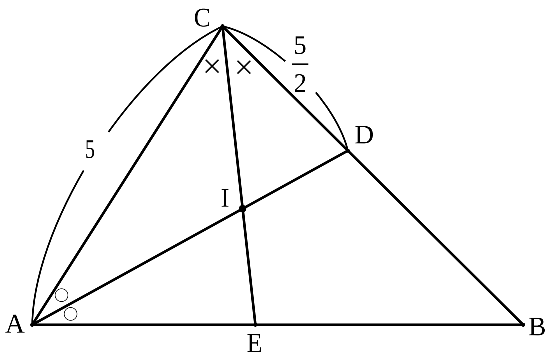
となる。したがって，△ ABC の面積は	
$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{BC}\cdot \sin\angle \mathrm{ABC}=6\sqrt{6}$$ ・・・(答)	**△ ABC の面積 ‥3 点**
と求められる。また，△ ABC の内接円の半径を r とすると	
$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}r\left(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}\right)$$	
が成り立つから，△ ABC の内接円の半径は	
$$r=\frac{2\cdot 6\sqrt{6}}{7+6+5}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$ ・・・(答)	**内接円の半径 ‥3 点**
である。	
(2)[別解]	**(2)[別解]　9 点**
$$\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\rvert^2=\left\lvert\vec{b}-\vec{a}\right\rvert^2=\left\lvert\vec{b}\right\rvert^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left\lvert\vec{a}\right\rvert^2=49$$ $$\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\rvert^2=\left\lvert\vec{c}-\vec{a}\right\rvert^2=\left\lvert\vec{c}\right\rvert^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+\left\lvert\vec{a}\right\rvert^2=25$$	
より，$\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\rvert=7,\ \left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\rvert=5$ である。また，	
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\\&=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\left\lvert\vec{a}\right\rvert^2\\&=19\end{aligned}$$	**△ ABC の 2 つの辺の長さと内積を求める‥3 点**
であるから，△ ABC の面積は	
$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\rvert^2\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\rvert^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}=6\sqrt{6}$$ ・・・(答)	**△ ABC の面積 ‥3 点**
と求められる。さらに，	
$$\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\rvert^2=\left\lvert\vec{c}-\vec{b}\right\rvert^2=\left\lvert\vec{c}\right\rvert^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left\lvert\vec{b}\right\rvert^2=36$$	
より，$\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\rvert=6$ であり，△ ABC の内接円の半径を r とすると	
$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}r\left(\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\rvert+\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\rvert+\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right\rvert\right)$$	
が成り立つから，△ ABC の内接円の半径は	
$$r=\frac{2\cdot 6\sqrt{6}}{7+6+5}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$ ・・・(答)	**内接円の半径 ‥3 点**
である。	

(3)

内心は三角形の 3 つの内角の二等分線の交点である。$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，角の二等分線の性質より

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{CA}=7:5$$

であるから，$\mathrm{CD}=\dfrac{5}{12}\mathrm{BC}=\dfrac{5}{2}$ と分かる。



$\triangle$ CAD において，線分 CI は $\angle$ACD の二等分線であるから，

$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{CA}:\mathrm{CD}=5:\dfrac{5}{2}=2:1$ となる。したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{7}{18}\vec{c}\end{aligned}$$

・・・(答)

である。ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{18}\vec{b}+\frac{1}{18}\vec{c}=\frac{1}{18}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{HI}}\right|=\dfrac{1}{18}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\dfrac{1}{3}$ であり，$\dfrac{1}{3}<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ より，点 H は平面 ABC 上で $\triangle$ ABC の内接円の内部にある。

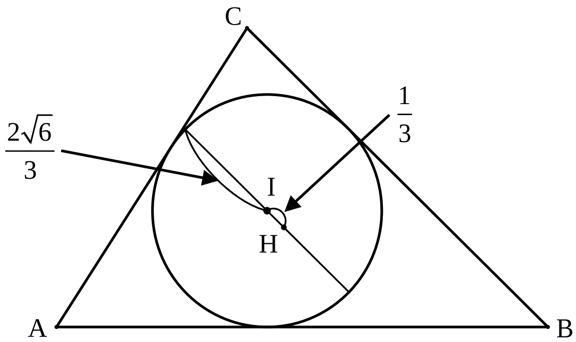
(3)　15 点

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ ・・**6 点**

$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\dfrac{1}{18}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ・・**3 点**

点 H が $\triangle$ ABC の内接円の内部にある

・・3 点



$|\overrightarrow{HP}|$ が最小となるとき，3 点 I, H, P がこの順に一直線上に並び，

$|\overrightarrow{HP}|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}-\dfrac{1}{3}$ である。$|\overrightarrow{HP}|$ が最大となるとき，3 点 H, I, P がこの順に一直線上に並び，$|\overrightarrow{HP}|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+\dfrac{1}{3}$ である。したがって，$|\overrightarrow{HP}|$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{2\sqrt{6}-1}{3} \leqq |\overrightarrow{HP}| \leqq \frac{2\sqrt{6}+1}{3} \qquad \cdot\cdot\cdot(答)$$

である。

(3)[別解]

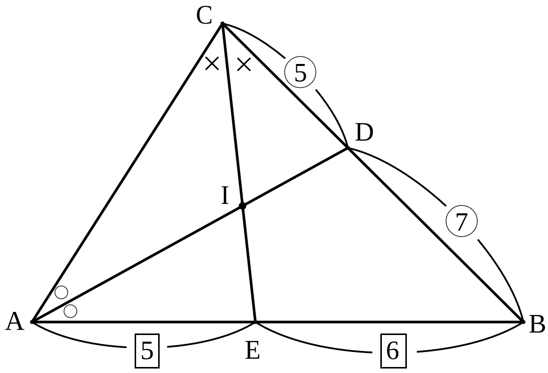
内心は三角形の 3 つの内角の二等分線の交点である。$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D，$\angle$ACB の二等分線と辺 AB との交点を E とすると，角の二等分線の性質より

$$\mathrm{BD:DC=AB:CA}=7:5$$
$$\mathrm{AE:EB=CA:BC}=5:6$$

と分かる。

$|\overrightarrow{HP}|$ のとりうる値の範囲‥3 点

(3)[別解]　15 点



△ ABC の内心 I は 2 つの線分 AD, CE 上にあるから，k, l を実数として

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AI}}=l\overrightarrow{\mathrm{AE}}+(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{5}{12}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{7}{12}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{5}{11}l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{cases}$$

と表せ，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は平行でないから

$$\begin{cases}\dfrac{5}{12}k=\dfrac{5}{11}l\\ \dfrac{7}{12}k=1-l\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{2}{3}\\ l=\dfrac{11}{18}\end{cases}$$

と求められる。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{5}{18}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{7}{18}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{5}{18}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{7}{18}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$\therefore\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{7}{18}\vec{c}\qquad\cdots(答)$$

である。ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{18}\vec{b}+\frac{1}{18}\vec{c}=\frac{1}{18}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

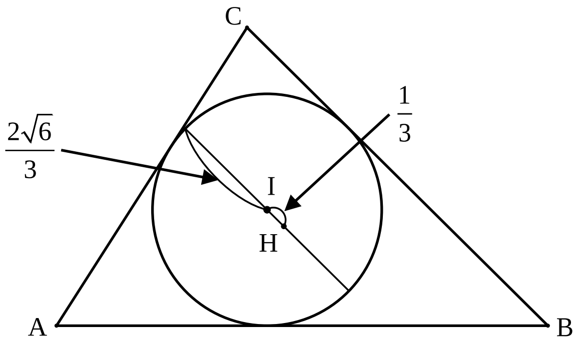
であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{HI}}\right|=\dfrac{1}{18}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\dfrac{1}{3}$ であり，$\dfrac{1}{3}<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ より，点 H は平面

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$・・**6 点**

$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\dfrac{1}{18}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$・・**3 点**

点 H が△ ABC の内接円の内部にある・・3 点

ABC 上で△ ABC の内接円の内部にある。



$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ が最小となるとき，3 点 I, H, P がこの順に一直線上に並び,

$\left|\overrightarrow{HP}\right| = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{3}$ である。$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ が最大となるとき，3 点 H, I, P がこの順に一直線上に並び，$\left|\overrightarrow{HP}\right| = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{3}$ である。したがって，$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{2\sqrt{6}-1}{3} \leqq \left|\overrightarrow{HP}\right| \leqq \frac{2\sqrt{6}+1}{3} \quad \cdots (答)$$

である。

$\left|\overrightarrow{HP}\right|$ のとりうる値の範囲‥3 点

4.　（３０点）

【解答・採点基準】

(1) [1] $n=1$ のとき $(\text{左辺})=(1+h)^1=1+h$ $(\text{右辺})=0$ より, (左辺) > (右辺)が成立する。 [2] $n \geqq 2$ のとき 二項定理を用いて展開すると $(\text{左辺})=(1+h)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot h^k \cdot 1^{n-k}$　・・・① である。このとき①の最右辺の $k=2$ に対応する項は ${}_n\mathrm{C}_2 \cdot h^2=\frac{n(n-1)}{2}h^2=(\text{右辺})$ であり，それ以外の項は正であるから(左辺) > (右辺)が成立する。 以上[1], [2]より $(1+h)^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2$ が成立する。 次に $\lim_{n\to\infty} n\alpha^n=0\ (0<\alpha<1)$ を示す。$y=\frac{1}{1+x}$ とおくと x が $x>0$ の範囲を動くとき，y は $0<y<1$ の範囲を動く。よって，$0<\alpha<1$ より正の定数 h を用いて $\alpha=\frac{1}{1+h}$ と表せる。$n \geqq 2$ のとき $0<n\alpha^n=\frac{n}{(1+h)^n}<\frac{2}{(n-1)h^2}\ \left(\because (1+h)^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2\right)$ ・・・② が成立し $n\to\infty$ で(②の最右辺) $\to 0$ となるから，はさみうちの原	**(1)　12点** **$n=1$ のときを正しく示して‥1点** **二項定理を用いる方針‥2点** **$n \geqq 2$ のときを正しく示して‥3点** **$\alpha=\frac{1}{1+h}$ とする方針(とり得る値の議論はなくても可)‥2点** **不等式評価できて‥2点**

理より $\lim_{n\to\infty} n\alpha^n = 0$ が成立する。

(証明終)

(1)[別解 1]

（$n=1$ のとき同様）

n を 2 以上の自然数とし，実数全体を定義域とする関数

$$g(x) = (1+x)^n - \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

に対して，

$$h>0 \text{ ならば } g(h)>0$$

となることを示す。

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n(n-1)x$$

$$g''(x) = n(n-1)\left\{(1+x)^{n-2} - 1\right\} \ (n \geqq 2)$$

より，$h>0$ ならば

$$\therefore g''(h) = n(n-1)\left\{(1+h)^{n-2} - 1\right\} \geqq 0$$

となる。よって $g'(x)$ は $x>0$ の範囲で x の増加に伴い減少しないから，

$$g'(h) \geqq g'(0) = n > 0$$

となる。これより $g(x)$ は $x>0$ の範囲で x の増加に伴い増加するから，

$$g(h) > g(0) = 1 > 0$$

となる。したがって，

$$h>0 \text{ ならば } g(h)>0$$

となるから

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \ (h>0) \quad ・・・③$$

が成立する。

次に $\lim_{n\to\infty} n\alpha^n = 0 \ (0<\alpha<1)$ を示す。自然対数をとると

$$\log(n\alpha^n) = \log n + n\log\alpha$$
$$= n\left(\frac{\log n}{n} + \log\alpha\right)$$

$\lim_{n\to\infty} n\alpha^n = 0$ を示す‥2 点

(1)［別解 1］12 点

$n=1$ のときを正しく示して‥1 点

$g'(x)$ の $x>0$ における（広義）単調増加性を示す‥1 点

$g(x)$ の $x>0$ における（狭義）単調増加性を示す‥1 点

不等式③を示す‥3 点

となる。ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=\lim_{e^t\to\infty}\frac{\log e^t}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}$ と変形でき，③において，$n=t>0,\ h=1$ とした結果を利用して，

$$0<\frac{t}{e^t}<\frac{t}{2^t}<\frac{2}{t-1}\underset{t\to\infty}{\to}0$$

より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$$

となる。また，$0<\alpha<1$ において $\log\alpha<0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(n\alpha^n\right)=-\infty$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}n\alpha^n=0$$

となる。

(証明終)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ を示す‥2 点

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(n\alpha^n\right)=-\infty$ を示す‥2 点

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\alpha^n=0$ を示す‥2 点

(1)[別解 2]

(1)［別解 2］12 点

数学的帰納法により，全ての自然数 n について

$$(1+h)^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2 \qquad ・・・④$$

$$(1+h)^n>nh \qquad ・・・⑤$$

が成立することを示す。

[1]　$n=1$ のとき

(④，⑤の左辺) $=(1+h)^1=1+h$

(④の右辺) $=0$

(⑤の右辺) $=h$

より，不等式④，⑤が成立する。

$n=1$ のときを正しく示して‥1 点

[2]　$n=k$ (k は自然数)のとき

$$(1+h)^k>kh$$

が成立すると仮定すると

$$(1+h)^k+h>kh+h=(k+1)h$$

が成立し

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}-\left\{(1+h)^k+h\right\}&=(1+h)^k\left\{(1+h)-1\right\}-h\\&=h\left\{(1+h)^k-1\right\}\\&>0\end{aligned}$$

$$\therefore (1+h)^{k+1} > (1+h)^k + h > (k+1)h$$

より $n=k+1$ で不等式⑤が成立する。また，

$$(1+h)^k > \frac{k(k-1)}{2}h^2$$

が成立すると仮定すると

$$(1+h)^k + kh^2 > \frac{k(k-1)}{2}h^2 + kh^2$$
$$\Leftrightarrow (1+h)^k + kh^2 > \frac{k(k+1)}{2}h^2$$

が成立し

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} - \left\{(1+h)^k + kh^2\right\} &= (1+h)^k\left\{(1+h)-1\right\} - kh^2 \\ &= h\left\{(1+h)^k - kh\right\} \\ &> 0\end{aligned}$$

$$\therefore (1+h)^{k+1} > (1+h)^k + kh^2 > \frac{k(k+1)}{2}h^2$$

より $n=k+1$ で不等式④が成立する。

以上[1], [2]より全ての自然数 n について，不等式④，⑤が成立する。

(以下 $\lim_{n\to\infty} n\alpha^n = 0$ の証明は本解に準ずる)

(2)

以下，$n \geqq 2$ のときを考える。

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\cos^{k+1}\theta + \cos\theta \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\cos^k\theta\end{aligned}$$

と変形できる。

$$\begin{aligned}a_n &= \cos\theta + 2\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cdots + \qquad\quad n\cos^n\theta \\ \cos\theta\, a_n &= \qquad\quad \cos^2\theta + 2\cos^3\theta + \cdots + (n-1)\cos^n\theta + n\cos^{n+1}\theta\end{aligned}$$

より辺々を引いて

$$(1-\cos\theta)a_n = \sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta - n\cos^{n+1}\theta$$
$$\therefore a_n = \frac{1}{1-\cos\theta}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta - n\cos^{n+1}\theta\right) \quad (\because 1-\cos\theta \neq 0)$$

⑤を示す(方法は問わない)‥2 点

④を数学的帰納法で示す‥3 点

(以下‥6 点)

(2)　10 点

$a_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos^k\theta$ と書き換えて‥2 点

a_n を極限が示せる形まで処理できて(採点基準下部の注参照)‥2 点

を得る。ここで$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より$0<\cos\theta<1$であるから無限等比級数の公式と(1)の結果を用いて

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta=\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\lim_{n\to\infty}n\cos^{n+1}\theta=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(n+1)\cos^{n+1}\theta=0$$

となるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\cos\theta}{(1-\cos\theta)^2}\qquad\cdots(答)$$

となる。

(3)

(2)で得られた極限値を用いて

$$f(\theta)\theta^m=\frac{\theta^m\cos\theta}{(1-\cos\theta)^2}=\frac{\theta^m\cos\theta}{\left(2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=2^{m-2}\frac{\left(\dfrac{\theta}{2}\right)^m}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}\cos\theta$$

となる。$m<4\Leftrightarrow 4-m>0$のとき

$$\lim_{\theta\to+0}f(\theta)\theta^m=\lim_{\theta\to+0}2^{m-2}\left(\frac{\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^4\frac{1}{\left(\dfrac{\theta}{2}\right)^{4-m}}\cos\theta=\infty$$

となり発散する。$m=4$のとき

$$\lim_{\theta\to+0}f(\theta)\theta^m=\lim_{\theta\to+0}4\left(\frac{\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^4\cos\theta=4$$

となるため，求めるmの最小値は4で，このとき求める極限は4に収束する。　・・・(答)

(1)の結果の利用((1)で示せていなくても可)‥2点

答‥4点

(3)　8点

$\dfrac{0}{0}$の不定形の解消(採点基準下部の注参照)‥2点

$m<4$で発散することに言及‥2点

$m=4$で収束することに言及‥2点

極限値が4‥2点

(2)[注] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\alpha^k$の計算方法について

解答では一般項が(等差数列の一般項)×(等比数列の一般項)で表される数列の部分和は，公比を乗じて差をとるという等比数列の部分和と同様のプロセスで求める定石を利用しているが，以下のような解き方もある。

[1] 等比級数を微分する

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\alpha^k &= \alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha^k\right) \\
&= \alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha^{n+1}-\alpha}{\alpha-1}\right) \\
&= \alpha \frac{\left\{(n+1)\alpha^n - 1\right\}(\alpha-1)-\left(\alpha^{n+1}-\alpha\right)}{(\alpha-1)^2} \\
&= \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\left\{n\alpha^{n+1}-(n+1)\alpha^n+1\right\}
\end{aligned}
$$

[2] 和のとり方を変える

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\alpha^k &= \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \cdots + n\alpha^n \\
&= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n \\
&\qquad + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n \\
&\qquad\qquad + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n \\
&\qquad\qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha^n \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\alpha^j \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{a^k\left(1-\alpha^{n-k+1}\right)}{1-\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{a^k-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}-n\alpha^{n+1}\right) \\
&= \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\left\{n\alpha^{n+1}-(n+1)\alpha^n+1\right\}
\end{aligned}
$$

(3)[注] 不定形の解消方法について

解答では半角公式を用いているが

$$
\begin{aligned}
f(\theta)\theta^m &= \frac{\theta^m \cos\theta}{(1-\cos\theta)^2} \\
&= \frac{\theta^m \cos\theta(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2} \\
&= \frac{\theta^m \cos\theta(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos^2\theta)^2} \\
&= \frac{\theta^m}{\sin^4\theta}\cos\theta(1+\cos\theta)^2
\end{aligned}
$$

としてもよい。

5．（３０点）

【解答・採点基準】

(1)	(1)　4 点
$x(2-t)$, $y(2-t)$ をそれぞれ計算すると， $$\begin{aligned} x(2-t) &= -4\left(\left\|2-t-1\right\|-\frac{1}{2}\right)^2+1 \\ &= -4\left(\left\|-t+1\right\|-\frac{1}{2}\right)^2+1 \\ &= -4\left(\left\|t-1\right\|-\frac{1}{2}\right)^2+1 \\ &= x(t) \end{aligned}$$	$x(2-t)=x(t)$ を示す‥2 点
$$\begin{aligned} y(2-t) &= \frac{2-t-1}{(2-t)^2-2(2-t)-3} \\ &= \frac{-t+1}{t^2-2t-3} \\ &= -y(t) \end{aligned}$$	$y(2-t)=-y(t)$ を示す‥2 点
となるから，$x(2-t)=x(t)$, $y(2-t)=-y(t)$ が成り立つ。 (証明終)	
(2) (1)より，C の $1 \leqq t \leqq 2$ の部分は $0 \leqq t \leqq 1$ の部分と x 軸に関して対称であるから，$0 \leqq t \leqq 1$ の部分について調べればよい。$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$t-1 \leqq 0$ であるから，	(2)　12 点 対称性の利用‥2 点 （利用しない場合は増減表で得点調整）
$$\begin{aligned} x(t) &= -4\left(1-t-\frac{1}{2}\right)^2+1 \\ &= -4\left(-t+\frac{1}{2}\right)^2+1 \\ &= -4t^2+4t \end{aligned}$$ である。$x(t)$, $y(t)$ をそれぞれ t で微分すると，	

$$\frac{dx(t)}{dt} = -8t + 4$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{(t^2 - 2t - 3) - (t-1)(2t-2)}{(t^2 - 2t - 3)^2}$$

$$= \frac{-t^2 + 2t - 5}{(t^2 - 2t - 3)^2}$$

$$= \frac{-(t-1)^2 - 4}{(t^2 - 2t - 3)^2}$$

となる。$0 \leqq t \leqq 1$ かつ $\dfrac{dx(t)}{dt} = 0$ を満たす t は

$$-8t + 4 = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}$$

であり，また，$\dfrac{dy(t)}{dt} < 0$ である。したがって，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で，$(x(t),\ y(t))$ は t の値の変化に対して以下のように変化する。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dx(t)}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy(t)}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
$(x(t),\ y(t))$	$\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	$\left(1,\ \frac{2}{15}\right)$	$\swarrow$	$(0,\ 0)$

以上より，$1 \leqq t \leqq 2$ の部分も合わせて C の概形は以下のようになる。

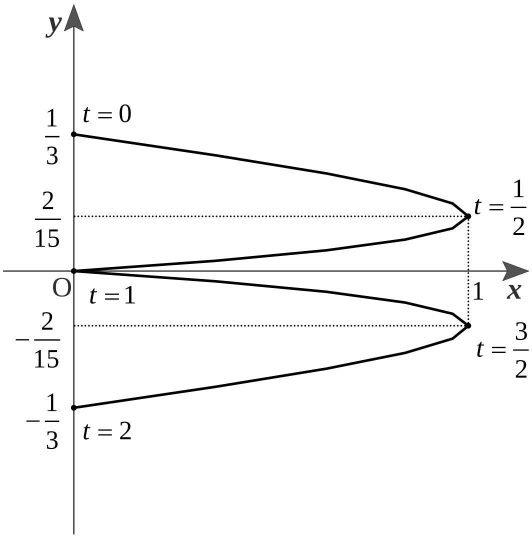
$\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ を求める

（正しい計算結果に加点）・・4 点

（各 2 点×2）

増減表・・3 点

（対称性を利用していない場合は 5 点）



(答) 上図

概形の図示‥3 点
(t の値を図中に記入していなくても減点しない)

(3)

(3)　14 点

C は x 軸に関して対称であるから，C と y 軸によって囲まれる図形のうち $y \geqq 0$ の部分の面積を求めて 2 倍すればよい。C の $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ の部分を $y=y_1(x)$，$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ の部分を $y=y_2(x)$ と表すとすると，$y \geqq 0$ の部分の面積は

$$\frac{S}{2}=\int_0^1 y_1(x)dx-\int_0^1 y_2(x)dx \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

面積の立式‥2 点

と表せる。ここで①の各項の定積分の積分範囲は以下のように t と対応する。

x	0	→	1
第 1 項の定積分の t	0	→	$\frac{1}{2}$
第 2 項の定積分の t	1	→	$\frac{1}{2}$

したがって，①は

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^{\frac{1}{2}}y_1(x)\frac{dx}{dt}dt-\int_1^{\frac{1}{2}}y_2(x)\frac{dx}{dt}dt\\&=\int_0^1 y(t)\frac{dx(t)}{dt}dt\\&=\int_0^1\frac{t-1}{t^2-2t-3}\cdot(-8t+4)dt\\&=-4\int_0^1\frac{(t-1)(2t-1)}{t^2-2t-3}dt\\&=-4\int_0^1\left(2+\frac{t+7}{t^2-2t-3}\right)dt\end{aligned}$$	置換積分(左式１行目)‥2点 左式5行目‥2点
となる。ここで，$t^2-2t-3=(t+1)(t-3)$より，ある実数A, Bを用いて $$\frac{t+7}{t^2-2t-3}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-3}\quad\cdots②$$ と表すことを考える。②の右辺を変形すると $$\begin{aligned}\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-3}&=\frac{A(t-3)+B(t+1)}{(t+1)(t-3)}\\&=\frac{(A+B)t-3A+B}{(t+1)(t-3)}\end{aligned}$$	部分分数分解をする方針‥2点
となるから，②が成り立つとき， $$\begin{cases}A+B=1\\-3A+B=7\end{cases}$$ $$\therefore A=-\frac{3}{2},\ B=\frac{5}{2}$$	A, Bを求める‥2点(完答)
である。したがって，$y\geqq 0$の部分の面積は $$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=-4\int_0^1\left(2-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{t-3}\right)dt\\&=-4\left[2t-\frac{3}{2}\log\lvert t+1\rvert+\frac{5}{2}\log\lvert t-3\rvert\right]_0^1\\&=-4\left\{\left(2-\frac{3}{2}\log 2+\frac{5}{2}\log 2\right)-\frac{5}{2}\log 3\right\}\\&=-8-4\log 2+10\log 3\end{aligned}$$	原始関数を求める‥2点
と求められ，求める面積Sは $$S=-16-8\log 2+20\log 3\quad\cdots(答)$$ である。	答‥2点
(3)[別解 1]	(3)[別解１]　14点

($\dfrac{S}{2}=-4\displaystyle\int_0^1\left(2+\dfrac{t+7}{t^2-2t-3}\right)dt$ と変形するところまで本解と同じ) ここで，$t^2-2t-3=(t-1)^2-4$ より，$t-1=2\sin\theta$ と置換すると， $\dfrac{dt}{d\theta}=2\cos\theta$ が成り立ち，積分範囲は以下のように対応する。	**（左式までの変形）・・****6 点****（本解の採点基準に準じる）** $t-1=2\sin\theta$ **と置換する方針・・****2 点**

t	0	$\to$	1
θ	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\to$	0

よって，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\frac{t+7}{t^2-2t-3}dt\\
&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{2\sin\theta+8}{4\sin^2\theta-4}\cdot\frac{dt}{d\theta}d\theta\\
&=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{2\sin\theta+8}{4\cos^2\theta}\cdot 2\cos\theta d\theta\\
&=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\sin\theta+4}{\cos\theta}d\theta\\
&=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{4\cos\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta\\
&=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{4\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\right)d\theta\\
&=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{4\cos\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}\right\}d\theta\\
&=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{2\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)d\theta\\
&=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{-(\cos\theta)'}{\cos\theta}-\frac{2(1-\sin\theta)'}{1-\sin\theta}+\frac{2(1+\sin\theta)'}{1+\sin\theta}\right\}d\theta\\
&=\Big[-\log|\cos\theta|-2\log|1-\sin\theta|+2\log|1+\sin\theta|\Big]_0^{-\frac{\pi}{6}}\\
&=\left[-\log|\cos\theta|+2\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|\right]_0^{-\frac{\pi}{6}}\\
&=-\log\frac{\sqrt{3}}{2}+2\log\frac{1}{3}\\
&=\log 2-\frac{5}{2}\log 3
\end{aligned}
$$

原始関数を求める・・**4 点**

と計算でき，求める面積 S は

$$\frac{S}{2} = -4\left[2t\right]_0^1 - 4\left(\log 2 - \frac{5}{2}\log 3\right)$$
$$= -8 - 4\log 2 + 10\log 3$$

$$\therefore S = 20\log 3 - 8\log 2 - 16 \quad ・・・(答)$$

答・・2 点

である。

(3)[別解 2]

(3)[別解 2]　14 点

C は x 軸に関して対称であるから，C と y 軸によって囲まれる図形のうち $y \geqq 0$ の部分の面積を求めて 2 倍すればよい。$y \geqq 0$ の部分の面積は

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{1}{3}} x(t)\,dy \qquad ・・・(※)$$

面積の立式・・2 点

と表せる。(※)の定積分の積分範囲は以下のように t と対応する。

y	0	$\to$	$\frac{1}{3}$
t	1	$\to$	0

したがって，(※)は

$$\frac{S}{2} = \int_1^0 x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt$$

置換積分(左式)・・2 点

となる。ここで，$y(t)$ は

$$y(t) = \frac{t-1}{(t+1)(t-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-3}\right)$$

と変形できるから，

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-3)^2}\right\}$$

$y(t)$ を部分分数分解して微分する・・2 点

である。よって，求める面積 S は

$$\frac{S}{2} = \int_1^0 x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt$$
$$= \int_1^0 \left(-4t^2 + 4t\right)\cdot\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-3)^2}\right\}dt$$
$$= 2\int_1^0 \left\{\frac{t^2 - t}{(t+1)^2} + \frac{t^2 - t}{(t-3)^2}\right\}dt$$

左式 3 行目・・2 点

$$=2\int_1^0\left\{\frac{(t+1)^2-3(t+1)+2}{(t+1)^2}+\frac{(t-3)^2+5(t-3)+6}{(t-3)^2}\right\}dt$$

$$=2\int_1^0\left\{2-\frac{3}{t+1}+\frac{2}{(t+1)^2}+\frac{5}{t-3}+\frac{6}{(t-3)^2}\right\}dt$$

$$=2\left[2t-3\log|t+1|-\frac{2}{t+1}+5\log|t-3|-\frac{6}{t-3}\right]_1^0$$

$$=2\cdot5\log3-2(4+2\log2)$$

$$=10\log3-4\log2-8$$

$$\therefore S=20\log3-8\log2-16 \quad ・・・(答)$$

となる。

被積分関数を部分分数分解する・・2 点

原始関数を求める・・2 点

答・・2 点

(3)[別解 3]

(3)[別解 3]　14 点

(左式を導くところまで)・・4 点(別解 2 の採点基準に準じる)

$\left(\frac{S}{2}=\int_1^0 x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt\right.$ を導くところまで別解 2 と同じ)

$$\frac{S}{2}=\int_1^0 x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt$$

$$=\int_1^0(-4t^2+4t)\frac{-t^2+2t-5}{(t^2-2t-3)^2}dt$$

$$=4\int_1^0\frac{t^4-3t^3+7t^2-5t}{t^4-4t^3-2t^2+12t+9}dt$$

$$=4\int_1^0\left\{1+\frac{t^3+9t^2-17t-9}{(t+1)^2(t-3)^2}\right\}dt$$

左式 4 行目・・2 点

となる。ここで，ある実数 p, q, r, s を用いて

$$\frac{t^3+9t^2-17t-9}{(t+1)^2(t-3)^2}=\frac{p}{t+1}+\frac{q}{(t+1)^2}+\frac{r}{t-3}+\frac{s}{(t-3)^2}$$

と表すことを考える。このとき，

部分分数分解する方針・・2 点

$$t^3+9t^2-17t-9$$

$$=p(t+1)(t-3)^2+q(t-3)^2+r(t+1)^2(t-3)+s(t+1)^2$$

$$=(p+r)t^3+(-5p+q-r+s)t^2$$

$$+(3p-6q-5r+2s)t+(9p+9q-3r+s)$$

が成り立ち，

$$\begin{cases}p+r=1\\-5p+q-r+s=9\\3p-6q-5r+2s=-17\\9p+9q-3r+s=-9\end{cases}$$

$$\therefore(p,\ q,\ r,\ s)=\left(-\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{5}{2},\ 3\right)$$

p, q, r, s を求める・・2 点(完答)

である。したがって，求める面積 S は	
$$\frac{S}{2}=4\int_1^0\left\{1-\frac{3}{2(t+1)}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{5}{2(t-3)}+\frac{3}{(t-3)^2}\right\}dt$$ $$=4\left[t-\frac{3}{2}\log\lvert t+1\rvert-\frac{1}{t+1}+\frac{5}{2}\log\lvert t-3\rvert-\frac{3}{t-3}\right]_1^0$$	原始関数を求める・・2 点
$$=4\cdot\frac{5}{2}\log 3-4(2+\log 2)$$ $$=10\log 3-4\log 2-8$$ $$\therefore S=20\log 3-8\log 2-16 \quad ・・・(答)$$	答・・2 点
となる。	
(3)[別解 4]	(3)[別解 4]　14 点
($\frac{S}{2}=\int_1^0 x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt$ を導くところまで別解 2 と同じ)	(左式を導くところまで)・・4 点(別解 2 の採点基準に準じる)
$$\frac{S}{2}=\int_1^0 x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt$$ $$=\int_1^0\left(-4t^2+4t\right)\frac{-t^2+2t-5}{\left(t^2-2t-3\right)^2}dt$$ $$=4\int_1^0\frac{t^4-3t^3+7t^2-5t}{\left(t^2-2t-3\right)^2}dt$$ $$=4\int_1^0\left\{\frac{t^2-t+8}{t^2-2t-3}+\frac{8t+24}{\left(t^2-2t-3\right)^2}\right\}dt$$ $$=4\int_1^0\left\{1+\frac{t+11}{t^2-2t-3}+\frac{8t+24}{\left(t^2-2t-3\right)^2}\right\}dt$$	
$$=4\int_1^0\left\{1+\frac{t-1}{t^2-2t-3}+\frac{8t-8}{\left(t^2-2t-3\right)^2}\right\}dt$$ $$+4\int_1^0\frac{12}{t^2-2t-3}dt+4\int_1^0\frac{32}{\left(t^2-2t-3\right)^2}dt$$	左式 6 行目・・2 点
$$=4\int_1^0\left\{1+\frac{t-1}{t^2-2t-3}+\frac{8t-8}{\left(t^2-2t-3\right)^2}\right\}dt$$ $$+4\int_1^0\frac{12}{t^2-2t-3}dt+4\int_1^0\frac{32}{\left(t^2-2t-3\right)^2}dt$$	
となる。第 1 項の定積分は	

$$4\int_1^0\left\{1+\frac{t-1}{t^2-2t-3}+\frac{8t-8}{\left(t^2-2t-3\right)^2}\right\}dt$$

$$=4\int_1^0\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(t^2-2t-3\right)'}{t^2-2t-3}+\frac{4\left(t^2-2t-3\right)'}{\left(t^2-2t-3\right)^2}\right\}dt$$

$$=4\left[t+\frac{1}{2}\log\left|t^2-2t-3\right|-\frac{4}{t^2-2t-3}\right]_1^0$$

$$=4\left\{\left(\frac{1}{2}\log 3+\frac{4}{3}\right)-\left(2+\frac{1}{2}\log 4\right)\right\}$$

$$=2\log 3-4\log 2-\frac{8}{3}$$

と求められる。第 2 項と第 3 項の定積分について,

$t^2-2t-3=(t-1)^2-4$ より，$t-1=2\sin\theta$ と置換すると,

$\dfrac{dt}{d\theta}=2\cos\theta$ が成り立ち，積分範囲は以下のように対応する。

t	1	$\rightarrow$	0
θ	0	$\rightarrow$	$-\dfrac{\pi}{6}$

よって，定積分 $\displaystyle\int_1^0\frac{1}{t^2-2t-3}dt$ は

$$\int_1^0\frac{1}{t^2-2t-3}dt=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{(t-1)^2-4}\cdot\frac{dt}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{4\sin^2\theta-4}\cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{2\cos\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{(1+\sin\theta)'}{1+\sin\theta}-\frac{(1-\sin\theta)'}{1-\sin\theta}\right\}d\theta$$

第 1 項の定積分

‥2 点

$$=-\frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|\right]_0^{-\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{4}\log 3$$

と求められる。また，定積分 $\int_1^0 \frac{1}{(t^2-2t-3)^2}dt$ は

$$\int_1^0 \frac{1}{(t^2-2t-3)^2}dt=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\left\{(t-1)^2-4\right\}^2}\cdot\frac{dt}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\left\{4\sin^2\theta-4\right\}^2}\cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{8\cos^3\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos\theta}\cdot(\tan\theta)'d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\right]_0^{-\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{8}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)'\tan\theta d\theta$$

$$=-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}-\frac{\sin\theta(\cos\theta)'}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta}\right)'\sin\theta d\theta$$

$$=-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\left[\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}\right]_0^{-\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{8}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin\theta)'}{2\cos^2\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{24}-\frac{1}{32}\log 3$$

と求められる。なお，$\int_0^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos\theta}d\theta=-\frac{1}{4}\log 3$ を求めるにあたっては第 2 項の定積分の計算結果を利用した。したがって，求める面積 S は

$$\frac{S}{2}=2\log 3-4\log 2-\frac{8}{3}+48\cdot\frac{1}{4}\log 3+128\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{32}\log 3\right)$$

$$=10\log 3-4\log 2-8$$

$$\therefore S=20\log 3-8\log 2-16 \quad ・・・(答)$$

である。

第 2 項の定積分

・・2 点

第 3 項の定積分

・・2 点

答・・2 点

(2)[注]

対称性を利用しない場合，C の $1 \leqq t \leqq 2$ の部分について，

$$x(t) = -4\left(t-1-\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$
$$= -4t^2 + 12t - 8$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -8t + 12$$

であり，増減表は以下のようになる。

t	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$\frac{dx(t)}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy(t)}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
$(x(t),\ y(t))$	$(0,\ 0)$	$\searrow$	$\left(1,\ -\frac{2}{15}\right)$	$\swarrow$	$\left(0,\ -\frac{1}{3}\right)$