2023 第2回 神戸大本番レベル模試(文系)

解答・解説・採点基準

全３問　８０分　７５点満点

1. （２５点）

【解答・採点基準】

(1) $2 = 51 - 49$ $\Leftrightarrow 5000 = 51 \cdot 2500 + 49 \cdot (-2500)$ より整数の組 $(n,\ m) = (-2500,\ 2500)$ は問題文の不定方程式を満たす。 (答) $(n,\ m) = (-2500,\ 2500)$	(1)　5 点 答‥5 点 ($n = 51k + 50$, $m = -49k + 50$ で表されるものであればなんでも可)
(1)[別解 1] $49 + 51 = 100$ $\Leftrightarrow 49 \cdot 50 + 51 \cdot 50 = 5000$ より整数の組 $(n,\ m) = (50,\ 50)$ は問題文の不定方程式を満たす。 (答) $(n,\ m) = (50,\ 50)$	(1)[別解 1]　5 点 答‥5 点
(1)[別解 2] $51 = 49 \cdot 1 + 2$ $49 = 2 \cdot 24 + 1$ に注意すると	(1)[別解 2]　5 点

$$
\begin{aligned}
49n+51m &= 49n+(49+2)m \\
&= 49(n+m)+2m \\
&= (2\cdot 24+1)(n+m)+2m \\
&= 2(24n+25m)+(n+m)
\end{aligned}
$$

と変形できる。$k=24n+25m,\ l=n+m$ として新たに整数 k, l で置換すると

$$49n+51m=5000 \Leftrightarrow 2k+l=5000$$

に書き換えられる。例えば，$(k, l)=(2500, 0)$ はこれを満たす。このとき

$$\begin{cases} 24n+25m=2500 \\ n+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-2500 \\ m=-n \end{cases}$$

$$\therefore (n, m)=(-2500, 2500)$$

である。

(答) $(n, m)=(-2500, 2500)$

答‥5 点

(2)

(2)　10 点

$$49n+51m=5000 \qquad \cdots ①$$

$$49\cdot(-2500)+51\cdot(2500)=5000 \qquad \cdots ②$$

①−②より

(1)で求めた整数解を代入した式を差し引く操作‥5 点

$$49(n+2500)=-51(m-2500)$$

を得る。$49=7^2$ と $51=3\cdot 17$ は互いに素であるから整数 j を用いて

$$
\begin{aligned}
n &= 51j-2500 \\
m &= -49j+2500
\end{aligned}
$$

と表せる。n, m がともに正となるのは

$$
\begin{aligned}
& n>0,\ m>0 \\
\Leftrightarrow\ & 51j>2500,\ 2500>49j \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2500}{51}<j<\frac{2500}{49} \\
\therefore\ & j=50, 51
\end{aligned}
$$

のときのみである。このとき

$$(n, m)=(50, 50), (101, 1)$$

である。

(答)　$n, m\ =\ 50, 50\ ,\ 101, 1$

答‥5 点(完答)

(3)

(3)　10 点

(2)の過程より $49n+51m=5000$ を満たすような整数の組 n, m は整

数 j を用いて

$$n=51j-2500=51(j-50)+50$$
$$m=-49j+2500=-49(j-50)+50$$

と表せるから，別の整数 $j'=j-50$ を用いて $51j'+50,\ -49j'+50$ とも表せる。すると

$$\begin{aligned}
&n^2+m^2\\
&=(51j'+50)^2+(-49j'+50)^2\\
&=(51^2+49^2)j'^2+2(51\cdot 50-49\cdot 50)j'+2\cdot 50^2\\
&=\{(50+1)^2+(50-1)^2\}j'^2+200j'+5000\\
&=5002j'^2+200j'+5000\\
&=5002\left\{j'^2+\frac{200}{5002}j'+\left(\frac{100}{5002}\right)^2\right\}-\frac{100^2}{5002}+5000\\
&=5002\left(j'+\frac{100}{5002}\right)^2-\frac{100^2}{5002}+5000
\end{aligned}$$

と変形できるから，n^2+m^2 を最小にするのは j' が $-\frac{100}{5002}$ に最も近い整数のとき，すなわち $j'=0$ のときである。このとき

$$(n,\ m)=(50,\ 50)$$

である。

(答) $(n,\ m)=(50,\ 50)$

(3)[別解]

実数 a が

$$\begin{cases}49x+51y=5000\\ x^2+y^2=a\end{cases}$$

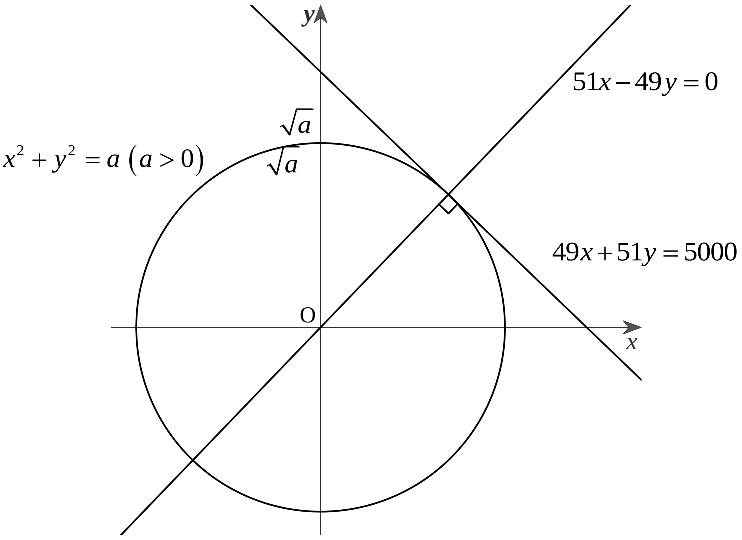
を満たす実数 $x,\ y$ が存在するような範囲を動くとき，a が最小値をとるときの $(x,\ y)$ の組は下図より円 $x^2+y^2=a$ と直線 $49x+51y=5000$ が接するときの接点の座標である。円の接点と円の中心を結ぶ直線が円の接線と直交する性質から，接点の座標は円の中心を通り直線 $49x+51y=5000$ に直交する直線 $51x-49y=0$ と直線 $49x+51y=5000$ の交点の座標に等しい。

平方完成‥5 点

(計算ミスがある場合、平方完成する方針が読みとれれば 3 点。微分して極小点を求める方針も可。)

答‥5 点

(3)[別解]　10 点



2 直線の交点は

$$\begin{cases} 49x+51y=5000 \\ 51x-49y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{49^2+51^2}{51}y=5000 \\ x=\dfrac{49}{51}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5000\cdot 49}{49^2+51^2} \\ y=\dfrac{5000\cdot 51}{49^2+51^2} \end{cases}$$

で与えられる。ここで

$$5000\cdot\ 50\pm1\ =250000\pm5000\quad \text{(複号同順)}$$

$$50-1\ ^2+\ 50+1\ ^2=2\cdot 50^2+2=5002$$

と工夫することで交点は

$$x,\ y\ =\left(\frac{245000}{5002},\ \frac{255000}{5002}\right)=\ 48.9\cdots,\ 50.9\cdots$$

とわかる。n^2+m^2 が最小値をとるのは直線 $49x+51y=5000$ 上の格子点のうち交点に最も近い点である。(2)の過程より直線 $49x+51y=5000$ 上の格子点は整数 j' を用いて $51j'+50,\ -49j'+50$ と表せる。n^2+m^2 を最小にするような候補は $j'=0,\ -1$ すなわち $n,\ m\ =\ 50,\ 50\ ,\ \ -1,\ 99$ である。

$$50^2+50^2=5000$$

$$-1\ ^2+99^2=1+\ 100-1\ ^2=10000-200+2=9802$$

円と直線が接する交点を求める‥5 点（計算ミスがある場合、円と直線が接する条件に注目できていれば 3 点）

であるから，n^2+m^2 を最小にするような組は

$$n,\ m \;=\; 50,\ 50$$

である。

(答)　$(n,\ m)=(50,\ 50)$

答・・5 点

2.　（２５点）

【解答・採点基準】

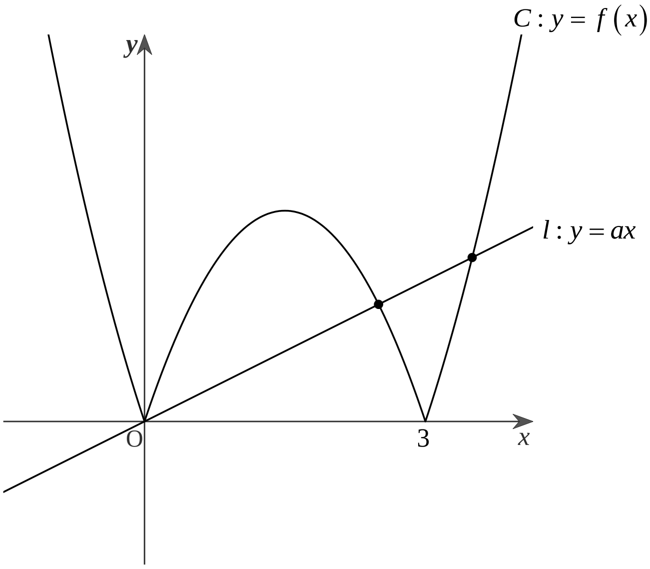
(1)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left|x^2-3x\right| \\
&= \left|x(x-3)\right|
\end{aligned}
$$

より，

$$
f(x)=\begin{cases} -x^2+3x & (0 \leqq x \leqq 3) \\ x^2-3x & (x<0,\ x>3) \end{cases}
$$

であるから，$C:y=f(x)$ と $l:y=ax$ を図示すると下図のようになる。



C と l はともに原点を通るから，必ず原点を共有点にもつ。曲線 $y=-x^2+3x$ と直線 $y=ax$ が接するとき，

$$
\begin{aligned}
& -x^2+3x=ax \\
\Leftrightarrow\ & x^2+(a-3)x=0
\end{aligned}
$$

の判別式を D_1 として，

$$
\begin{aligned}
& D_1=0 \\
\Leftrightarrow\ & (a-3)^2=0 \\
\therefore\ & a=3
\end{aligned}
$$

を得る。このとき接点は原点である。また，曲線 $y=x^2-3x$ と直線

(1)　10 点

$y=-x^2+3x$ と $y=ax$ が接するとき $a=3$・・3 点

$y=ax$ が接するとき，

$$x^2-3x=ax$$
$$\Leftrightarrow x^2-(a+3)x=0$$

の判別式を D_2 として，

$$D_2=0$$
$$\Leftrightarrow (a+3)^2=0$$
$$\therefore a=-3$$

を得る。このときも接点は原点である。よって，C と ℓ の共有点の個数は

$$\begin{cases} -3 \leqq a<0 \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ a<-3,\ a=0,\ a \geqq 3 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ 0<a<3 \text{ のとき} & 3\text{ 個} \end{cases}$$

である。

(答) 前述

(1)[別解] (C と l を図示するまでは同様)

曲線 $y=-x^2+3x$ と直線 $y=ax$ の共有点の x 座標は，

$$-x^2+3x=ax$$
$$\Leftrightarrow x^2+(a-3)x=0$$
$$\Leftrightarrow x\{x-(3-a)\}=0$$
$$\therefore x=0,\ 3-a$$

となり，曲線 $y=x^2-3x$ と直線 $y=ax$ の共有点の x 座標は

$$x^2-3x=ax$$
$$\Leftrightarrow x^2-(a+3)x=0$$
$$\Leftrightarrow x\{x-(a+3)\}=0$$
$$\therefore x=0,\ a+3$$

と求まる。点 $(3-a,\ 3a-a^2),\ (a+3,\ a^2+3a)$ が C と ℓ の原点以外の共有点となる条件は，それぞれ

$$0<3-a \leqq 3$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqq a<3$$
$$a+3<0,\ a+3 \geqq 3$$
$$\Leftrightarrow a<-3,\ a \geqq 0$$

であるから，C と l の共有点の個数は

$y=x^2-3x$ と $y=ax$ が接するとき $a=-3$・・3 点

答・・4 点

(1)[別解]　10 点

$y=-x^2+3x$ と l の共有点の x 座標は $x=0,\ 3-a$・・3 点

$y=x^2-3x$ と l の共有点の x 座標は $x=0,\ a+3$・・3 点

$$\begin{cases} -3 \leqq a < 0 \text{ のとき} & 1\text{個} \\ a < -3,\ a = 0,\ a \geqq 3 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ 0 < a < 3 \text{ のとき} & 3\text{個} \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

答‥4点

(2)

(2)　15点

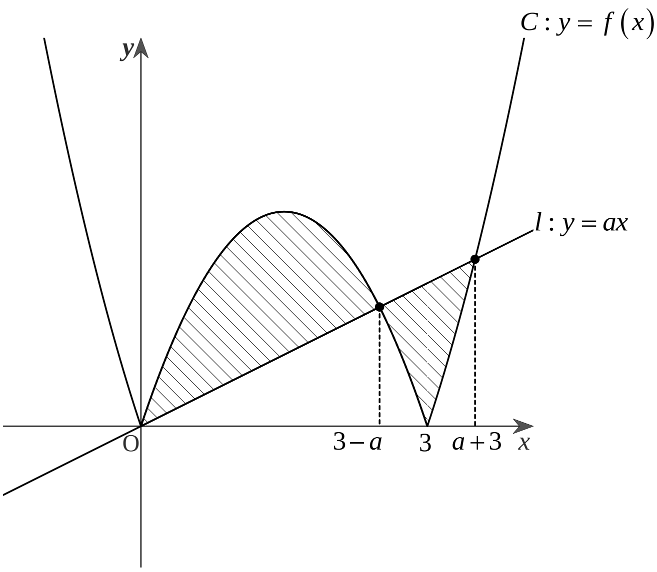
(1)より，$0 < a < 3$ である。曲線 $y = -x^2 + 3x$ と直線 $y = ax$ の共有点の x 座標は

$$-x^2 + 3x = ax$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (a-3)x = 0$$
$$\Leftrightarrow x\{x - (3-a)\} = 0$$
$$\therefore x = 0,\ 3-a$$

となり，曲線 $y = x^2 - 3x$ と直線 $y = ax$ の共有点の x 座標は

$$x^2 - 3x = ax$$
$$\Leftrightarrow x^2 - (a+3)x = 0$$
$$\Leftrightarrow x\{x - (a+3)\} = 0$$
$$\therefore x = 0,\ a+3$$

と求まるから，C と l によって囲まれる 2 つの領域は下図の斜線部分にあたる。



C と l によって囲まれる 2 つの領域の面積の和を $S(a)$ とおくと，

$$S(a)=\int_0^{3-a}\left\{\left(-x^2+3x\right)-ax\right\}dx+\int_{3-a}^{3}\left\{ax-\left(-x^2+3x\right)\right\}dx$$
$$+\int_3^{a+3}\left\{ax-\left(x^2-3x\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^{3-a}-x\{x-(3-a)\}dx+\int_{3-a}^{3}\left\{x^2+(a-3)x\right\}dx$$
$$+\int_3^{a+3}\left\{-x^2+(a+3)x\right\}dx$$
$$=\frac{1}{6}(3-a)^3+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(a-3)x^2\right]_{3-a}^{3}$$
$$+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(a+3)x^2\right]_3^{a+3}$$
$$=\frac{1}{6}(3-a)^3+9+\frac{9}{2}(a-3)+\frac{1}{6}(3-a)^3$$
$$+\frac{1}{6}(a+3)^3+9-\frac{9}{2}(a+3)$$
$$=\frac{1}{3}(3-a)^3+\frac{1}{6}(a+3)^3-9$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+\frac{9}{2}a^2-\frac{9}{2}a+\frac{9}{2}$$

を得る。

$S(a)$の立式‥3点

$S(a)$を正しく求めて‥3点
(完全に展開する必要はない)

$$S'(a)=-\frac{1}{2}a^2+9a-\frac{9}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(a^2-18a+9\right)$$

より，$0<a<3$での$S'(a)=0$の解は$a=9-6\sqrt{2}$である。これより$S(a)$の増減表は以下のようになる。

a	0	$\cdots$	$9-6\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

増減表‥5点

上表より，$S(a)$が最小値をとるのは

$$a=9-6\sqrt{2}$$

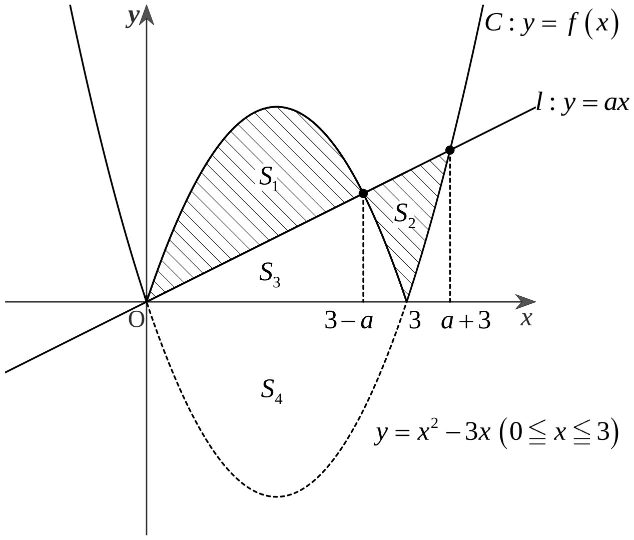
のときと分かる。

(答)　$a=9-6\sqrt{2}$

答‥4点

(2)[別解] ($y=-x^2+3x$ と $y=ax$， $y=x^2-3x$ と $y=ax$ の共有点の x 座標を求めるまでは同様)

(2)［別解］　15点



上図のように 4 つの領域の面積 S_1, S_2, S_3, S_4 を定める(S_4 は曲線 $y = x^2 - 3x\ (0 \leqq x \leqq 3)$ と x 軸によって囲まれる領域の面積を指す)。C と l によって囲まれる 2 つの領域の面積の和を $S(a)$ とおくと，$S(a) = S_1 + S_2$ である。ここで，曲線 $y = x^2 - 3x$ と曲線 $y = -x^2 + 3x$ は x 軸に関して対称であるため $S_1 + S_3 = S_4$ であり，また，

$S(a)$ の立式‥3 点

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^{3-a} \left\{ \left(-x^2 + 3x\right) - ax \right\} dx \\
&= \int_0^{3-a} -x \left\{ x - (3-a) \right\} dx \\
&= \frac{1}{6}(3-a)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 + S_3 + S_4 &= \int_0^{a+3} \left\{ ax - \left(x^2 - 3x\right) \right\} dx \\
&= \int_0^{a+3} -x \left\{ x - (a+3) \right\} dx \\
&= \frac{1}{6}(a+3)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \int_0^{3} -\left(x^2 - 3x\right) dx \\
&= \int_0^{3} -x(x-3)\, dx \\
&= \frac{1}{6} \cdot 3^3 \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

と求まる。以上より，

$$
\begin{aligned}
S(a) &= S_1 + S_2 \\
&= S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - S_3 - S_4 \\
&= S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - (S_4 - S_1) - S_4 \\
&= 2S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4 \\
&= 2 \cdot \frac{1}{6}(3-a)^3 + \frac{1}{6}(a+3)^3 - 2 \cdot \frac{9}{2} \\
&= -\frac{1}{6}a^3 + \frac{9}{2}a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

を得る。よって,

$$
\begin{aligned}
S'(a) &= -\frac{1}{2}a^2 + 9a - \frac{9}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(a^2 - 18a + 9)
\end{aligned}
$$

より,$0 < a < 3$ での $S'(a) = 0$ の解は $a = 9 - 6\sqrt{2}$ である。これより $S(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	0	$\cdots$	$9-6\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

上表より,$S(a)$ が最小値をとるのは

$$a = 9 - 6\sqrt{2}$$

のときと分かる。

(答) $a = 9 - 6\sqrt{2}$

$S(a)$ を正しく求めて‥3 点
(完全に展開する必要はない)

増減表‥5 点

答‥4 点

3.　（２５点）

【解答・採点基準】

解答	採点基準
(1) C, D, P が一直線上にあるとき，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表すことができる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-1,\ 1,\ -1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(-k,\ k,\ -k)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-k+3,\ k+2,\ -k+2)$ となる。また，P が平面 α 上にあることから，実数 a, b を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2a-b,\ 4a,\ 2b)$ より $2(-k+3)=(k+2)-(-k+2)$ $\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{2}$ となる。これより， $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。 (答)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$	**(1)　7点** **ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の各成分または P の座標を，文字を用いて 2 通りの方法で表して** **・・4点(各2点×2)** **答・・3点**
(1)[別解] 平面 α は原点 O を通り，xy 平面に垂直でないから，方程式は実数 s, t を用いて $sx+ty+z=0$ と表せる。また，平面 α は A, B を通ることから $\begin{cases} 2s+4t=0 \\ -s+2=0 \end{cases}$ となり，連立して解くと $(s,\ t)=(2,\ -1)$ となる。したがって，平面 α の式は $2x-y+z=0$ である。C, D, P が一直線上にあるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表すことができる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-1,\ 1,\ -1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(-k,\ k,\ -k)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-k+3,\ k+2,\ -k+2)$	**$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の各成分を文字を用いて表して** **・・2点**

となる。$\mathrm{P}(-k+3,\ k+2,\ -k+2)$ が平面 α 上にあることから

$$2(-k+3)-(k+2)+(-k+2)=0$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$$

となる。これより,

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

となる。

(答) $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

(2)

$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|$ が最小となるのは，P が C から平面 α に下ろした垂線の足であるときである。このとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ が成り立つ。(1) より実数 $a,\ b$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2a-b,\ 4a,\ 2b)$ と表すことができるから，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2a-b-3,\ 4a-2,\ 2b-2)$ となる。これより

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2,\ 4,\ 0)\cdot(2a-b-3,\ 4a-2,\ 2b-2)=0\\ (-1,\ 0,\ 2)\cdot(2a-b-3,\ 4a-2,\ 2b-2)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}20a-2b-14=0\\ -2a+5b-1=0\end{cases}$$

となり，連立して解くと $(a,\ b)=\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right)$ となる。これより,

$$\mathrm{P}(1,\ 3,\ 1)$$

となる。

(答) $\mathrm{P}(1,\ 3,\ 1)$

(3)

C, D は定点であるから，$\triangle$ CDP の周の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$ が最小となるのは，折れ線 CPD の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$ が最小となるときで

P が平面 α にあることから正しく立式して‥2 点

答‥3 点

(2)　7 点

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ ‥**2 点**

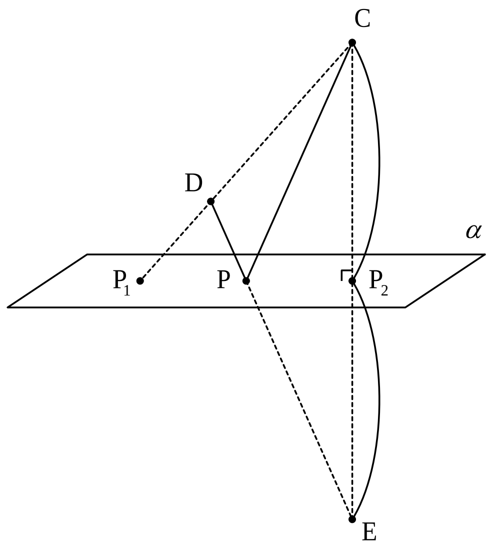
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ ‥**2 点**

答‥3 点

(3)　11 点

ある。(1)で求めたPをP_1とすると，$\overrightarrow{CP_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$となり，C, D, P_1がこの順で一直線上にあることから，C, Dは平面αに対して同じ側に存在することがわかる。したがって，平面αに関してCと対称な点をEとすると，折れ線CPDの長さは折れ線DPEの長さ$|\overrightarrow{DP}|+|\overrightarrow{EP}|$に等しく，この長さが最小となるのはD, P, Eが一直線上にあるときで，その長さは$|\overrightarrow{DE}|$である。CEと平面αの交点をP_2とすると，この点は(2)で求めたPと一致する。

C, Dが平面αに対して同じ側にあることに言及して‥2点



まず，Eの座標を求める。

$$\overrightarrow{P_2C}=-\overrightarrow{P_2E}\Leftrightarrow\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OC}$$

より，$E(-1,\ 4,\ 0)$となる。続いて，D, P, Eが一直線上にあるときのPの座標を求める。$\overrightarrow{DE}=(-3,\ 1,\ -1)$より，実数$l$を用いて

$$\overrightarrow{DP}=(-3l,\ l,\ -l)$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(-3l+2,\ l+3,\ -l+1)$$

となる。また，(1)より実数a, bを用いて$\overrightarrow{OP}=(2a-b,\ 4a,\ 2b)$と表すことができる。ベクトル$\overrightarrow{OP}$の各成分を比較すると

$$\begin{cases}-3l+2=2a-b\\ l+3=4a\\ -l+1=2b\end{cases}$$

平面αに関してC（またはD）と対称な点の座標を求めて‥2点

ベクトル$\overrightarrow{OP}$の各成分またはPの座標を文字を用いて2通りの方法で表して‥2点(各1点×2)

より

$$2(-3l+2)=(l+3)-(-l+1)$$
$$\Leftrightarrow l=\frac{1}{4}$$

となる。これより，P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{5}{4},\ \frac{13}{4},\ \frac{3}{4}\right)$$

となる。また，このときの△ CDP の周の長さは

$$\begin{aligned}&\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|\\&=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}+\sqrt{(-3)^2+1^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{3}+\sqrt{11}\end{aligned}$$

である。

(答) $\mathrm{P}\left(\frac{5}{4},\ \frac{13}{4},\ \frac{3}{4}\right)$，周の長さ $\sqrt{3}+\sqrt{11}$

P の座標‥2 点

周の長さ‥3 点

(3)[別解] 11 点

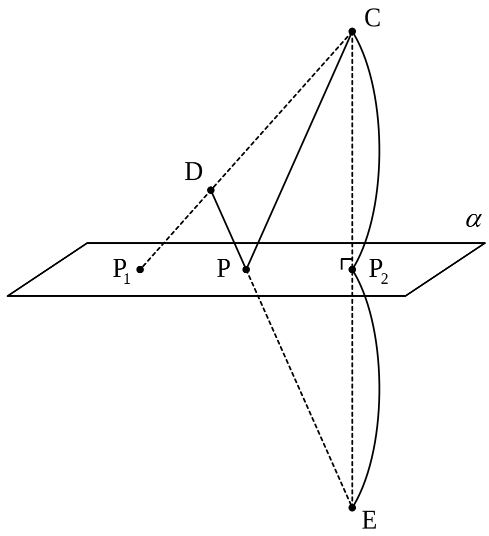
(3)[別解]

C, D は定点であるから，△ CDP の周の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$ が最小となるのは，折れ線 CPD の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$ が最小となるときである。$f(x,\ y,\ z)=2x-y+z$ とすると，平面 α の式は $f(x,\ y,\ z)=0$ である。ここで

$$\begin{cases}f(3,\ 2,\ 2)=2\cdot3-2+2=6>0\\f(2,\ 3,\ 1)=2\cdot2-3+1=2>0\end{cases}$$

より，正領域・負領域の考え方より，C, D は平面 α に対して同じ側に存在する。したがって，平面 α に関して C と対称な点を E とすると，折れ線 CPD の長さは折れ線 DPE の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{EP}}\right|$ に等しく，この長さが最小となるのは D, P, E が一直線上にあるときで，その長さは $\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|$ である。CE と平面 α の交点を P_2 とすると，この点は(2)で求めた P と一致する。

C, D が平面 α に対して同じ側にあることに言及して‥2 点



まず，E の座標を求める。

$$\overrightarrow{P_2C}=-\overrightarrow{P_2E} \Leftrightarrow \overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OC}$$

より，$E(-1,\ 4,\ 0)$ となる。続いて，D, P, E が一直線上にあるときの P の座標を求める。$\overrightarrow{DE}=(-3,\ 1,\ -1)$ より，実数 l を用いて

$$\overrightarrow{DP}=(-3l,\ l,\ -l)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=(-3l+2,\ l+3,\ -l+1)$$

となる。$P(-3l+2,\ l+3,\ -l+1)$ が平面 α 上にあることから

$$2(-3l+2)-(l+3)+(-l+1)=0$$
$$\Leftrightarrow l=\frac{1}{4}$$

となる。(以下，**解答**と同じ)

(答) $P\left(\frac{5}{4},\ \frac{13}{4},\ \frac{3}{4}\right)$，周の長さ $\sqrt{3}+\sqrt{11}$

平面 α に関して C（または D）と対称な点の座標を求めて‥2 点

P の座標を文字を用いて表して‥1 点

P が平面 α にあることから正しく立式して‥1 点

P の座標‥2 点

周の長さ‥3 点