2023 第2回 神戸大本番レベル模試(理系)

解答・解説・採点基準

全５問　１２０分　１５０点満点

1.　（３０点）

【解答・採点基準】

(1) $2=51-49$ $\Leftrightarrow 5000=51\cdot 2500+49\cdot(-2500)$	(1)　6点
より整数の組 $(n,\ m)=(-2500,\ 2500)$ は問題文の不定方程式を満たす。 (答)　$(n,\ m)=(-2500,\ 2500)$	答‥6点 ($n=51k+50$, $m=-49k+50$ で表されるものであればなんでも可)
(1)[別解1] $49+51=100$ $\Leftrightarrow 49\cdot 50+51\cdot 50=5000$	(1)[別解1]　6点
より整数の組 $(n,\ m)=(50,\ 50)$ は問題文の不定方程式を満たす。 (答)　$(n,\ m)=(50,\ 50)$	答‥6点
(1)[別解2] $51=49\cdot 1+2$ $49=2\cdot 24+1$ に注意すると	(1)[別解2]　6点

$$
\begin{aligned}
49n+51m &= 49n+(49+2)m \\
&= 49(n+m)+2m \\
&= (2\cdot 24+1)(n+m)+2m \\
&= 2(24n+25m)+(n+m)
\end{aligned}
$$

と変形できる。$k=24n+25m,\ l=n+m$ として新たに整数 k, l で置換すると

$$49n+51m=5000 \Leftrightarrow 2k+l=5000$$

に書き換えられる。例えば，$(k, l)=(2500, 0)$ はこれを満たす。このとき

$$\begin{cases} 24n+25m=2500 \\ n+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-2500 \\ m=-n \end{cases}$$

$$\therefore (n, m)=(-2500, 2500)$$

である。

(答) $(n, m)=(-2500, 2500)$

答‥6 点

(2)

(2) 12 点

$$49n+51m=5000 \quad \cdots ①$$

$$49\cdot(-2500)+51\cdot(2500)=5000 \quad \cdots ②$$

①−②より

$$49(n+2500)=-51(m-2500)$$

を得る。$49=7^2$ と $51=3\cdot 17$ は互いに素であるから整数 j を用いて

$$
\begin{aligned}
n &= 51j-2500 \\
m &= -49j+2500
\end{aligned}
$$

と表せる。n, m がともに正となるのは

$$
\begin{aligned}
& n>0,\ m>0 \\
\Leftrightarrow\ & 51j>2500,\ 2500>49j \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2500}{51}<j<\frac{2500}{49} \\
\therefore\ & j=50, 51
\end{aligned}
$$

のときのみである。このとき

$$(n, m)=(50, 50), (101, 1)$$

である。

(1)で求めた整数解を代入した式を差し引く操作‥6 点

(答) $(n, m)=(50, 50),\ (101, 1)$

答‥6 点(完答)

(3)

(3) 12 点

(2)の過程より $49n+51m=5000$ を満たすような整数の組 (n, m) は整

数 j を用いて

$$n = 51j - 2500 = 51(j-50)+50$$
$$m = -49j + 2500 = -49(j-50)+50$$

と表せるから，別の整数 $j' = j-50$ を用いて $51j'+50,\ -49j'+50$ とも表せる。すると

$$
\begin{aligned}
&n^2+m^2\\
&= (51j'+50)^2 + (-49j'+50)^2\\
&= (51^2+49^2)j'^2 + 2(51\cdot 50 - 49\cdot 50)j' + 2\cdot 50^2\\
&= \{(50+1)^2 + (50-1)^2\}j'^2 + 200j' + 5000\\
&= 5002j'^2 + 200j' + 5000\\
&= 5002\left\{j'^2 + \frac{200}{5002}j' + \left(\frac{100}{5002}\right)^2\right\} - \frac{100^2}{5002} + 5000\\
&= 5002\left(j' + \frac{100}{5002}\right)^2 - \frac{100^2}{5002} + 5000
\end{aligned}
$$

と変形できるから，n^2+m^2 を最小にするのは j' が $-\dfrac{100}{5002}$ に最も近い整数のとき，すなわち $j'=0$ のときである。このとき

$$(n,\ m) = (50,\ 50)$$

である。

(答) $(n,\ m) = (50,\ 50)$

平方完成‥6 点

(計算ミスがある場合、平方完成する方針が読みとれれば 3 点。微分して極小点を求める方針も可。)

答‥6 点

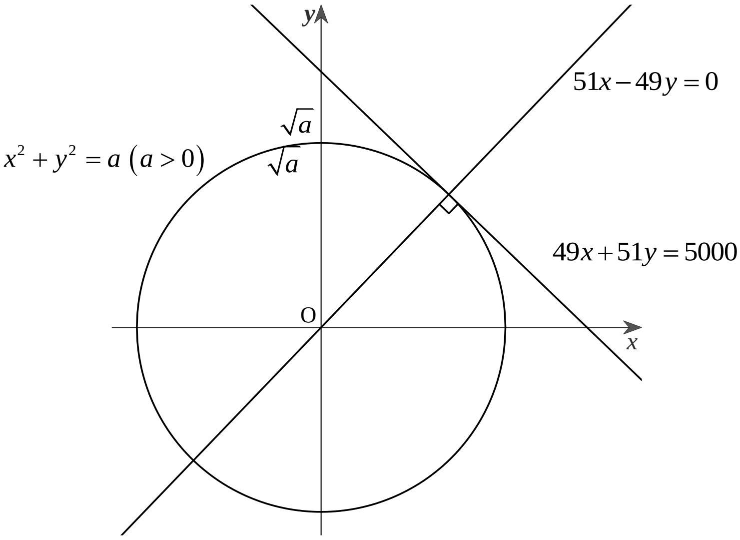
(3)[別解]

(3)[別解]　12 点

実数 a が

$$\begin{cases} 49x+51y = 5000 \\ x^2+y^2 = a \end{cases}$$

を満たす実数 $x,\ y$ が存在するような範囲を動くとき，a が最小値をとるときの $(x,\ y)$ の組は下図より円 $x^2+y^2=a$ と直線 $49x+51y=5000$ が接するときの接点の座標である。円の接点と円の中心を結ぶ直線が円の接線と直交する性質から，接点の座標は円の中心を通り直線 $49x+51y=5000$ に直交する直線 $51x-49y=0$ と直線 $49x+51y=5000$ の交点の座標に等しい。



2 直線の交点は

$$
\begin{cases} 49x+51y=5000 \\ 51x-49y=0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} \dfrac{49^2+51^2}{51}y=5000 \\ x=\dfrac{49}{51}y \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} x=\dfrac{5000\cdot 49}{49^2+51^2} \\ y=\dfrac{5000\cdot 51}{49^2+51^2} \end{cases}
$$

で与えられる。ここで

$$5000\cdot(50\pm1)=250000\pm5000 \quad (\text{複号同順})$$

$$(50-1)^2+(50+1)^2=2\cdot50^2+2=5002$$

と工夫することで交点は

$$(x,\ y)=\left(\frac{245000}{5002},\ \frac{255000}{5002}\right)=(48.9\cdots,\ 50.9\cdots)$$

とわかる。n^2+m^2 が最小値をとるのは直線 $49x+51y=5000$ 上の格子点のうち交点に最も近い点である。(2)の過程より直線 $49x+51y=5000$ 上の格子点は整数 j' を用いて $(51j'+50,\ -49j'+50)$ と表せる。n^2+m^2 を最小にするような候補は $j'=0,\ -1$ すなわち $(n,\ m)=(50,\ 50),\ (-1,\ 99)$ である。

$$50^2+50^2=5000$$
$$(-1)^2+99^2=1+(100-1)^2=10000-200+2=9802$$

円と直線が接する交点を求める‥6 点（計算ミスがある場合、円と直線が接する条件に注目できていれば 3 点）

であるから，n^2+m^2 を最小にするような組は

$$n,\ m \ = \ 50,\ 50$$

である。

(答)　$(n,\ m)=(50,\ 50)$

答‥6 点

2. （３０点）

【解答・採点基準】

(1)

数学的帰納法で$1<a_n<2$が成立することを示す。

[1] $n=1$のとき

$a_1=\dfrac{3}{2}$より$1<a_1<2$が成立する。

[2] $n=k$ (kは正の整数)のとき$1<a_n<2$の成立を仮定する。

$f(x)=x+\dfrac{2}{x}-1$とおくと，$a_{n+1}=f(a_n)$であり，

$$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}=\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2}$$

より，$1<x<2$の範囲の増減は下表にしたがう。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$2\sqrt{2}-1$	$\nearrow$	2

よって，$1<a_k<2$ならば$1<2\sqrt{2}-1\leqq a_{k+1}<2$が成立する。

以上, [1], [2]より問題文の主張は示された。

(証明終)

(2)

与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+1}=a_n+\frac{2}{a_n}-1$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}-2=(a_n-2)+\frac{2}{a_n}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=1-\frac{1}{a_n-2}\left(1-\frac{2}{a_n}\right)\ (\because a_n-2\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=1-\frac{1}{a_n-2}\cdot\frac{a_n-2}{a_n}$$

$$\therefore b_n=\left|\frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}\right|=\left|1-\frac{1}{a_n}\right|<\frac{1}{2}\ (\because 1<a_n<2)$$

(1)　10点

すべてのkに対して$1<a_k$を示して(相加相乗平均も可)・・4点

$1<a_k<2\Rightarrow a_{k+1}<2$を示して・・4点

証明完了・・2点

(2)　10点

漸化式を代入してb_nをa_nのみで表す方針・・2点

$b_n=\left|1-\dfrac{1}{a_n}\right|$に類する簡素な式を導出・・6点

が示される。 (証明終) (3) (2)より $$b_n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lvert a_n - 2\rvert < \frac{1}{2}\lvert a_{n-1} - 2\rvert \quad n = 2, 3, \cdots$$ である。よって $$0 < \lvert a_n - 2\rvert < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \lvert a_1 - 2\rvert = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n = 2, 3, \cdots$$ となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ であるから，はさみうちの原理により $$\lim_{n\to\infty}\lvert a_n - 2\rvert = 0$$ $$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$ を得る。 (答)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$	**a_n の範囲を根拠に証明完了･･2 点** **(3)　10 点** $\lvert a_n - 2\rvert < \frac{1}{2}\lvert a_{n-1} - 2\rvert$ **･･2 点** $\lvert a_n - 2\rvert < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **･･4 点** **はさみうちの原理** **(** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$ **が読み取れれば加点)** **･･2 点** **答･･2 点**

3.　（３０点）

【解答・採点基準】

(1)

（1）　8点

C, D, P が一直線上にあるとき，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表すことができる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-1,\ 1,\ -1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(-k,\ k,\ -k)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-k+3,\ k+2,\ -k+2)$$

となる。また，P が平面 α 上にあることから，実数 a, b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2a-b,\ 4a,\ 2b)$$

より

$$2(-k+3)=(k+2)-(-k+2)$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$$

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の各成分または P の座標を，文字を用いて 2 通りの方法で表して
‥4 点(各 2 点×2)

となる。これより，

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

となる。

(答)　$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

答‥4 点

(1)[別解]

平面 α は原点 O を通り，xy 平面に垂直でないから，方程式は実数 s, t を用いて $sx+ty+z=0$ と表せる。また，平面 α は A, B を通ることから

$$\begin{cases} 2s+4t=0 \\ -s+2=0 \end{cases}$$

となり，連立して解くと $(s,\ t)=(2,\ -1)$ となる。したがって，平面 α の式は $2x-y+z=0$ である。C, D, P が一直線上にあるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表すことができる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-1,\ 1,\ -1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(-k,\ k,\ -k)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-k+3,\ k+2,\ -k+2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の各成分を文字を用いて表して
‥2 点

となる。$\mathrm{P}(-k+3,\ k+2,\ -k+2)$ が平面 α 上にあることから

$$2(-k+3)-(k+2)+(-k+2)=0$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$$

となる。これより,

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

となる。

P が平面 α にあることから正しく立式して‥2 点

(答) $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

答‥4 点

(2)

(2) 8 点

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ が最小となるのは，P が C から平面 α に下ろした垂線の足であるときである。このとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ が成り立つ。(1) より実数 $a,\ b$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2a-b,\ 4a,\ 2b)$ と表すことができるから，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2a-b-3,\ 4a-2,\ 2b-2)$ となる。これより

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2,\ 4,\ 0)\cdot(2a-b-3,\ 4a-2,\ 2b-2)=0\\ (-1,\ 0,\ 2)\cdot(2a-b-3,\ 4a-2,\ 2b-2)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}20a-2b-14=0\\ -2a+5b-1=0\end{cases}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ ‥2 点

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ ‥2 点

となり，連立して解くと $(a,\ b)=\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right)$ となる。これより,

$$\mathrm{P}(1,\ 3,\ 1)$$

となる。

(答) $\mathrm{P}(1,\ 3,\ 1)$

答‥4 点

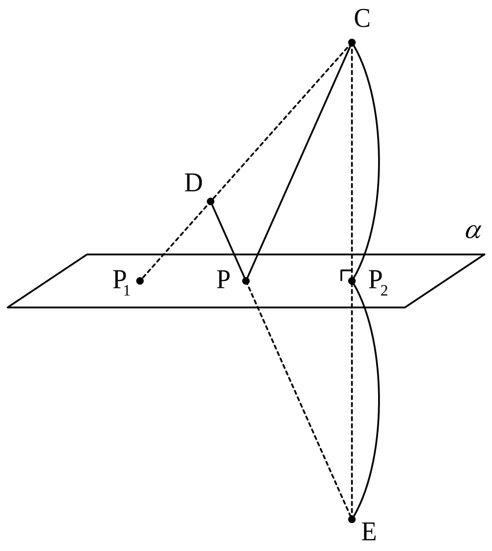
(3)

(3) 14 点

C, D は定点であるから，△ CDP の周の長さ $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|$ が最小となるのは，折れ線 CPD の長さ $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|$ が最小となるときで

ある。(1)で求めた P を P_1 とすると，$\overrightarrow{CP_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ となり，C, D, P_1 がこの順で一直線上にあることから，C, D は平面 α に対して同じ側に存在することがわかる。したがって，平面 α に関して C と対称な点を E とすると，折れ線 CPD の長さは折れ線 DPE の長さ $\left|\overrightarrow{DP}\right|+\left|\overrightarrow{EP}\right|$ に等しく，この長さが最小となるのは D, P, E が一直線上にあるときで，その長さは $\left|\overrightarrow{DE}\right|$ である。CE と平面 α の交点を P_2 とすると，この点は(2)で求めた P と一致する。

C, D が平面 α に対して同じ側にあることに言及して・・3 点



まず，E の座標を求める。

$$\overrightarrow{P_2C}=-\overrightarrow{P_2E}\Leftrightarrow\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OC}$$

より，$E(-1,\ 4,\ 0)$ となる。続いて，D, P, E が一直線上にあるときの P の座標を求める。$\overrightarrow{DE}=(-3,\ 1,\ -1)$ より，実数 l を用いて

$$\overrightarrow{DP}=(-3l,\ l,\ -l)$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(-3l+2,\ l+3,\ -l+1)$$

となる。また，(1)より実数 a, b を用いて $\overrightarrow{OP}=(2a-b,\ 4a,\ 2b)$ と表すことができる。ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の各成分を比較すると

$$\begin{cases}-3l+2=2a-b\\ l+3=4a\\ -l+1=2b\end{cases}$$

平面 α に関して C（または D）と対称な点の座標を求めて・・3 点

ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の各成分または P の座標を文字を用いて 2 通りの方法で表して・・2 点(各 1 点×2)

より

$$2(-3l+2)=(l+3)-(-l+1)$$
$$\Leftrightarrow l=\frac{1}{4}$$

となる。これより，P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{5}{4},\ \frac{13}{4},\ \frac{3}{4}\right)$$

となる。また，このときの△CDP の周の長さは

$$\begin{aligned}&\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|\\&=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}+\sqrt{(-3)^2+1^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{3}+\sqrt{11}\end{aligned}$$

である。

(答) $\mathrm{P}\left(\frac{5}{4},\ \frac{13}{4},\ \frac{3}{4}\right)$，周の長さ $\sqrt{3}+\sqrt{11}$

P の座標･･3 点
周の長さ･･3 点

(3)[別解]

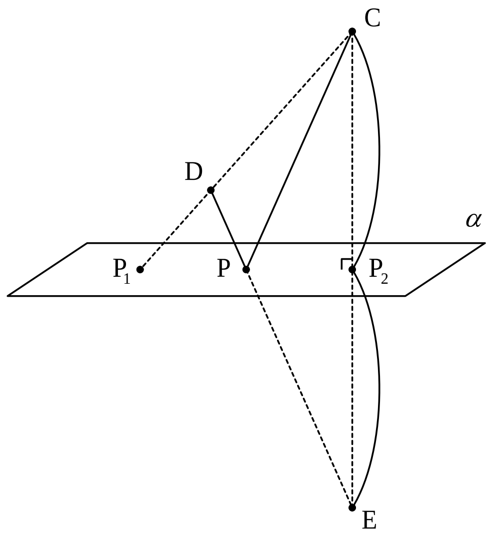
(3)[別解]　14 点

C, D は定点であるから，△CDP の周の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$ が最小となるのは，折れ線 CPD の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$ が最小となるときである。$f(x,\ y,\ z)=2x-y+z$ とすると，平面 α の式は $f(x,\ y,\ z)=0$ である。ここで

$$\begin{cases}f(3,\ 2,\ 2)=2\cdot3-2+2=6>0\\f(2,\ 3,\ 1)=2\cdot2-3+1=2>0\end{cases}$$

より，正領域・負領域の考え方より，C, D は平面 α に対して同じ側に存在する。したがって，平面 α に関して C と対称な点を E とすると，折れ線 CPD の長さは折れ線 DPE の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{EP}}\right|$ に等しく，この長さが最小となるのは D, P, E が一直線上にあるときで，その長さは $\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|$ である。CE と平面 α の交点を P_2 とすると，この点は(2)で求めた P と一致する。

C, D が平面 α に対して同じ側にあることに言及して･･3 点



まず，Eの座標を求める。

$$\overrightarrow{P_2C} = -\overrightarrow{P_2E} \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OC}$$

より，$E(-1,\ 4,\ 0)$ となる。続いて，D, P, E が一直線上にあるときのPの座標を求める。$\overrightarrow{DE} = (-3,\ 1,\ -1)$ より，実数 l を用いて

$$\overrightarrow{DP} = (-3l,\ l,\ -l)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (-3l+2,\ l+3,\ -l+1)$$

となる。$P(-3l+2,\ l+3,\ -l+1)$ が平面 α 上にあることから

$$2(-3l+2)-(l+3)+(-l+1)=0$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{1}{4}$$

となる。(以下，**解答**と同じ)

(答) $P\left(\frac{5}{4},\ \frac{13}{4},\ \frac{3}{4}\right)$，周の長さ $\sqrt{3}+\sqrt{11}$

平面 α に関して C（または D）と対称な点の座標を求めて‥3 点

P の座標を文字を用いて表して ‥1 点

P が平面 α にあることから正しく立式して ‥1 点

P の座標‥3 点

周の長さ‥3 点

4. （３０点）

【解答・採点基準】

(1)

まず，$(\sin x+1)(x+1)>0$ を満たす実数 x の範囲を求める。

$\sin x+1 \geqq 0$ より

$$(\sin x+1)(x+1)>0$$

$$\Leftrightarrow \sin x+1 \neq 0 \text{ かつ } x+1>0$$

$$\therefore x>-1 \text{ かつ } x \neq \frac{3}{2}\pi+2n\pi \ (n\text{ は整数})$$

が定義域である。次に $f(x)$ の導関数を求める。合成関数の微分，商の微分を用いて

$$f'(x)=\frac{1}{\dfrac{\sin x+1}{x+1}}\cdot\frac{\cos x\cdot(x+1)-(\sin x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)\cos x-(\sin x+1)}{(x+1)(\sin x+1)}$$

を得る。

(答) 定義域: $x>-1$ かつ $x \neq \frac{3}{2}\pi+2n\pi$ (n は整数),

導関数: $f'(x)=\dfrac{(x+1)\cos x-(\sin x+1)}{(x+1)(\sin x+1)}$

(2)

$y=f(x)$ のグラフの概形を調べるために $f(x)$ の増減を調べる。

$$f'(x)=\frac{(x+1)\cos x-(\sin x+1)}{(x+1)(\sin x+1)}$$

について $-1<x\leqq 2\pi$, $x \neq \frac{3}{2}\pi$ の範囲では分母が常に正であるから，$f'(x)$ の増減は $(x+1)\cos x-(\sin x+1)$ の増減に一致する。

$$g(x)=(x+1)\cos x-(\sin x+1) \quad (-1<x\leqq 2\pi)$$

とおくと，

(1)　10点

定義域‥5点

($\sin x+1=0$ となる点を除外していない場合3点)

導関数‥5点

(2)　20点

$f'(x)$ の分母は常に正‥2点

$$g'(x) = \cos x - (x+1)\sin x - \cos x$$
$$= -(x+1)\sin x$$

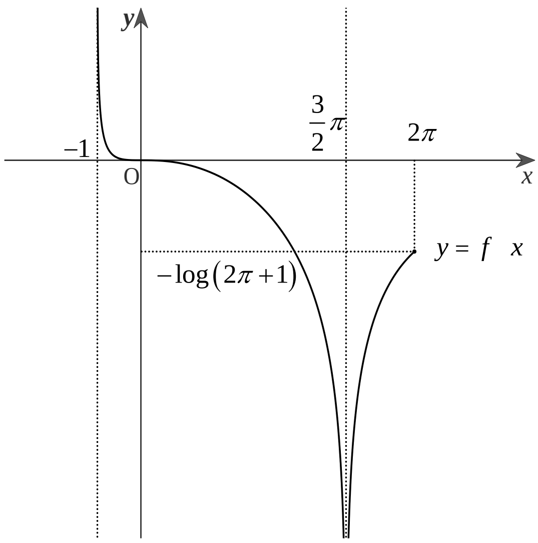
であるから，$-1 < x \leqq 2\pi$ における $g(x)$ および $f(x)$ の増減は下表にしたがう。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$	＼	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	＼	↗	0	↘		↗	0	↗	
$f'(x)$	＼	$-$	0	$-$		$-$	＼	$+$	
$f(x)$	＼	↘	0	↘		↘	＼	↗	

また，

$$\lim_{x \to -1+0} \log\left(\frac{\sin x + 1}{x+1}\right) = \infty$$
$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} \log\left(\frac{\sin x + 1}{x+1}\right) = -\infty$$
$$f(2\pi) = \log\left(\frac{1}{2\pi+1}\right) = -\log(2\pi+1)$$

より，$y = f(x)$ $\left(-1 < x \leqq 2\pi,\ x \neq \frac{3}{2}\pi\right)$ のグラフを図示すると下図のようになる。



$g'(x) = -(x+1)\sin x$ ··**2 点**

$g'(x)$ または $f''(x)$ の符号変化··**2 点**

$g(x)$ または $f'(x)$ の増減··**2 点**

$g(x)$ または $f'(x)$ の符号変化··**2 点**

$f(x)$ の増減··**2 点**

極限··**2 点**

（各 1 点×2）

$f(2\pi) = -\log(2\pi+1)$ ··**1 点**

図示··**5 点**

（原点を通過することが読み取れなければ **2 点減点**。

変曲点、漸近線の明示の有無は問わない）

(答) 前図

5. （３０点）

【解答・採点基準】

(1)

$x(t)=\sin 3t,\ y(t)=\sin 2t$ とすると，

$$\begin{aligned}\sin\{3(\pi-t)\}&=\sin(3\pi-3t)\\&=\sin(\pi-3t)\\&=\sin 3t\\ \sin\{2(\pi-t)\}&=\sin(2\pi-2t)\\&=\sin(-2t)\\&=-\sin 2t\end{aligned}$$

より，$\left(x(t),\ y(t)\right)=\left(x(\pi-t),\ -y(\pi-t)\right)$ が成り立つため，曲線 C の $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分と $\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ の部分は x 軸に関して対称である。よって，曲線 C の $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を考えれば十分である。また，

$$\frac{dx}{dt}=3\cos 3t,\ \frac{dy}{dt}=2\cos 2t$$

であるため，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=0\\&\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\\&\frac{dy}{dt}=0\\&\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。よって，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における曲線 C の増減は下表の通りである。

(1)　11 点

曲線 C は x 軸対称 ・・2 点

$\dfrac{dx}{dt}=3\cos 3t$ ・・1 点

$\dfrac{dy}{dt}=2\cos 2t$ ・・1 点

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\nearrow$	$\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

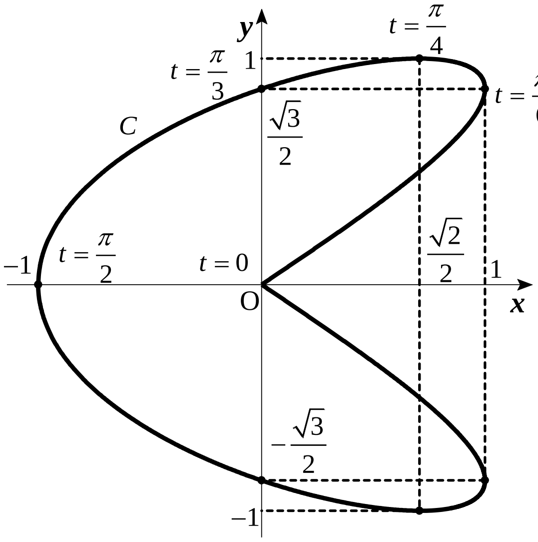
$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$-$		$-$	0
$+$	0	$-$	
$\nwarrow$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$	$\swarrow$	$(-1,\ 0)$

増減表・・3 点

ここで，$t=0$ のとき，$\frac{dx}{dt}=3,\ \frac{dy}{dt}=2$ であるため，$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}$ となる。また，C の y 切片について，$x=0$ とすると，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ より，

$$x=0$$
$$\Leftrightarrow 3t=0,\ \pi$$
$$\therefore t=0,\ \frac{\pi}{3}$$

であり，$t=\frac{\pi}{3}$ のとき，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるため，上表より，曲線 C の概形は下図の通りである。



正しく図を描いて ‥4 点

(答) 前図

(2)

(2) 7 点

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3} \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha - \beta \leqq -\dfrac{\pi}{6}$ であるため，

$\sin(\alpha - \beta) \neq 0$ である。また，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \alpha + \beta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ であるため，

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta$$
$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha - \sin 2\beta = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin\{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\} - \sin\{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = 0 \ (\because \sin(\alpha-\beta) \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$
$$\therefore \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ ‥2 点

となる。よって，$0 \leqq 3\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\sin 3\alpha = -\sin 3\beta$$ $$\Leftrightarrow \sin 3\alpha = -\sin\left\{3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}$$ $$\Leftrightarrow \sin 3\alpha = \sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{2}-2\pi\right)$$ $$\Leftrightarrow \sin 3\alpha = \cos 3\alpha$$ $$\Leftrightarrow \tan 3\alpha = 1$$ $$\Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{4}$$ $$\therefore \alpha = \frac{\pi}{12}$$	$\tan 3\alpha = 1$ ・・2 点
であるため，求める実数の組は $$(\alpha,\ \beta) = \left(\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi\right)$$ である。	
(答) $(\alpha,\ \beta) = \left(\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{5}{12}\pi\right)$	**答・・3 点(完答)**
(2)[別解]	**(2)［別解］ 7 点**
$-\sin 3\beta = \sin(2\pi - 3\beta)$ であり，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3} \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq 3\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} \leqq 2\pi - 3\beta \leqq \pi$ である。よって，$\sin 3\alpha = -\sin 3\beta$，すなわち，$\sin 3\alpha = \sin(2\pi - 3\beta)$ より，	
$$3\alpha + (2\pi - 3\beta) = \pi$$ $$\Leftrightarrow \alpha - \beta = -\frac{\pi}{3}$$	$\alpha - \beta = -\dfrac{\pi}{3}$ ・・2 点
となる。また，$0 \leqq 2\alpha \leqq \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi \leqq 2\beta \leqq \pi$ であるため，$\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ より，	
$$2\alpha + 2\beta = \pi$$ $$\Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$	$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ ・・2 点
となる。以上より，求める実数の組は，	

$$\begin{cases} \alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{3} \\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\therefore (\alpha,\ \beta)=\left(\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi\right)$$

である。

(答) $(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{5}{12}\pi\right)$

答‥3 点(完答)

(3)

(3)　12 点

y 軸を対称の軸として C を対称移動させた曲線を C' とする。このとき，実数 $s\ (0 \leqq s \leqq \pi)$ を C' の媒介変数として

$$C' : x=-\sin 3s,\ y=\sin 2s\ (0 \leqq s \leqq \pi)$$

となる。ここで，C と C' の第1象限における交点の座標を (X,Y) とすると，(1)の図より $0 < X \leqq 1,\ 0 < Y \leqq 1$ であるため，実数 $t_0\left(0 \leqq t_0 \leqq \dfrac{\pi}{6}\right)$ を用いて，$X=\sin 3t_0,\ Y=\sin 2t_0$ と表される。また，実数 $s_0\left(\dfrac{\pi}{3} \leqq s_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて，$X=-\sin 3s_0,\ Y=\sin 2s_0$ と表される。

よって，

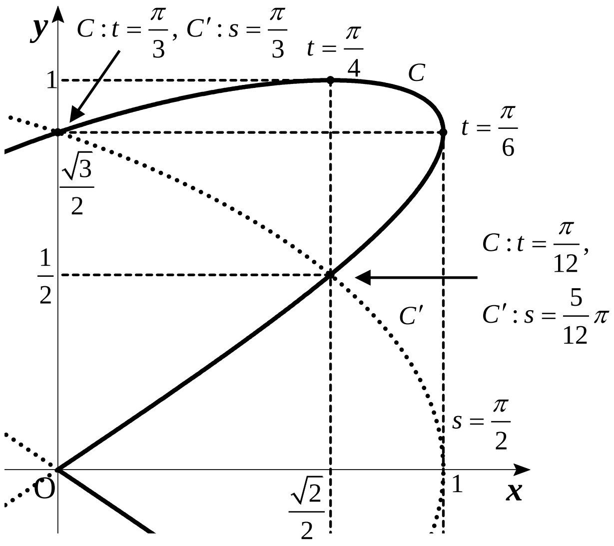
$$\sin 3t_0=-\sin 3s_0,\ \sin 2t_0=\sin 2s_0$$

であるため，(2)より，

$$(t_0,\ s_0)=(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi\right)$$

となり，$(X,Y)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。したがって，第1象限における C と C' は下図のようになる。ただし，C は実線，C' は破線で表されている。

C と C' の交点の座標 (X,Y) を正しく求めて‥4 点



上図より，C の $\frac{\pi}{12}\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}$ の部分を $x_1=\sin 3t,\ y_1=\sin 2t$，$C$ の $\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\frac{\pi}{3}$ の部分を $x_2=\sin 3t,\ y_2=\sin 2t$，$C'$ の $\frac{5}{12}\pi\leqq s\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分を $x_3=-\sin 3s,\ y_3=\sin 2s$ とすると，C について，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ の対称性より，求める体積 V は，

$$\begin{aligned}\frac{V}{2}&=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}{x_3}^2dy_3+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}{x_1}^2dy_1-\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}{x_2}^2dy_2\\&=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{12}\pi}{x_3}^2\frac{dy_3}{ds}ds+\pi\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}{x_1}^2\frac{dy_1}{dt}dt-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}{x_2}^2\frac{dy_2}{dt}dt\end{aligned}$$

となる。よって，$x=\sin 3t,\ y=\sin 2t$ とすると，

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{12}\pi}x^2\frac{dy}{ds}ds+2\pi\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}x^2\frac{dy}{dt}dt-2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}x^2\frac{dy}{dt}dt\\&=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{12}\pi}x^2\frac{dy}{dt}dt+2\pi\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}}x^2\frac{dy}{dt}dt\end{aligned}$$

である。ここで，

正しく立式して

・・3 点

$$
\begin{aligned}
2x^2\frac{dy}{dt} &= 2\sin^2 3t \cdot 2\cos 2t \\
&= 2(1-\cos 6t)\cdot \cos 2t \\
&= 2\cos 2t - 2\cos 6t \cos 2t \\
&= 2\cos 2t - \{\cos(6t-2t)+\cos(6t+2t)\} \\
&= 2\cos 2t - \cos 4t - \cos 8t
\end{aligned}
$$

となるため,

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{12}\pi}(2\cos 2t - \cos 4t - \cos 8t)\,dt \\
&\quad +\pi\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}}(2\cos 2t - \cos 4t - \cos 8t)\,dt \\
&= \pi\left[\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{8}\sin 8t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{12}\pi} \\
&\quad +\pi\left[\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{8}\sin 8t\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \pi\left(\sin\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{4}\sin\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{8}\sin\frac{10}{3}\pi\right) \\
&\quad -\pi\left(\sin\pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi - \frac{1}{8}\sin 4\pi\right) \\
&\quad +\pi\left(\sin\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{4}\sin\frac{4}{3}\pi - \frac{1}{8}\sin\frac{8}{3}\pi\right) \\
&\quad -\pi\left(\sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{8}\sin\frac{2}{3}\pi\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)\pi - 0 + \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi - \left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)\pi \\
&= \frac{15\sqrt{3}}{16}\pi
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $V=\dfrac{15\sqrt{3}}{16}\pi$

答‥5 点