２０２４年　神戸大学本番レベル模試・文系・数学

解答・解説・採点基準

全３問　８０分　７５点満点

Ⅰ．（２５点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

20 個の球を横1列に並べたときに球の間にできる隙間19 箇所のうち異なる 2 箇所に仕切りを入れて，仕切られた 3 箇所の球の個数を左から順に x, y, z と対応させる。(A)求める正の整数の組 (x, y, z) の総数は，このようにして作られる (x, y, z) の組の総数に等しく，

$$ {}_{19}\mathrm{C}_2 = \frac{19\cdot 18}{2\cdot 1} = 171\,(個) $$

である。

(答) 171 個(B)

(1)［別解］

正の整数 x, y, z が $x+y+z=20$ をみたすとき，$x+y$ のとりうる値の範囲は $2 \leqq x+y \leqq 19$ (C)である。また，$x+y=k$ (k は 2 以上 19 以下の整数)のとき，$x+y+z=20$ をみたす z は $z=20-k$ ただ1つである。$x+y=k$ をみたす正の整数の組 (x, y) の総数は $(1, k-1), (2, k-2), \cdots, (k-1, 1)$ の $(k-1)$ 個(D)であるから，求める正の整数の組の総数は

$$ \begin{aligned} \sum_{k=2}^{19}(k-1) &= \sum_{k=1}^{18} k \\ &= \frac{1}{2}\cdot 18\cdot 19 \\ &= 171\,(個) \end{aligned} $$

となる。

(1)　8 点 (A)(B)

(A)条件をみたす (x, y, z) を過不足なく得る方法を述べて‥4 点

(B)答‥4 点

・以下，単位の有無は不問

(1)［別解］　8 点 (C)(D)(B)

(C) $x+y$ のとり得る値の範囲‥2 点

・ z に注目していても可

(D) $x+y=k$ となる正の整数の組 (x, y) の総数‥2 点

(答) 171 個(B)

(B)答‥4 点

(2)

$x+y+z=20$ をみたす素数の組 (x, y, z) を考えるにあたって，まず和が 20 となる 3 つの素数の組を求める。すなわち，$a+b+c=20$ かつ $a \leqq b \leqq c$ をみたす素数の組 (a, b, c) を求める。このとき

$$\begin{aligned} c &= 20-a-b \\ &\leqq 20-2-2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

が成り立つから，素数 a, b, c はそれぞれ 16 以下の素数，すなわち $2, 3, 5, 7, 11, 13$ のいずれか(A)である。ここで，a, b, c のうち偶数素数 2 が 0 個または 2 個のとき $a+b+c$ は奇数になり，$a+b+c \neq 20$ である。また，偶数素数 2 が 3 個のとき $a+b+c=6 \neq 20$ である。よって偶数素数 2 は 1 個となるから，$a=2$ で $b, c \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$ になることがわかる。このうち，$b+c=18, b \leqq c$ をみたすのは $(b, c)=(5, 13), (7, 11)$ のみである。よって，条件をみたす素数の組 (a, b, c) は

$(a, b, c)=(2, 5, 13), (2, 7, 11)$(B)

である。求める素数の組 (x, y, z) の総数はこの並び替えを考えればよいから

$2 \cdot 3! = 12$ (個)

となる。

(答) 12 個(C)

(2) 8 点 (A)(B)(C)

(A) $a, b, c \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ ‥2 点

(B)条件をみたす 3 つの素数の組 ‥2 点(各 1 点×2)

(C)答‥4 点

(2)[別解]

$x+y+z=20$ をみたす素数の組 (x, y, z) を考えるにあたって，まず和が 20 となる 3 つの素数の組を求める。すなわち，$a+b+c=20$ かつ $a \leqq b \leqq c$ をみたす素数の組 (a, b, c) を求める。このとき

$$\begin{aligned} c &= 20-a-b \\ &\leqq 20-2-2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

が成り立つから，素数 a, b, c はそれぞれ 16 以下の素数，すなわち $2, 3, 5, 7, 11, 13$ のいずれか(A)である。以下，c の値について場合分けを行う。

[1] $c=13$ のとき

a, b がみたす条件は

(2)[別解] 8 点 (A)(B)(C)

(A) $a, b, c \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ ‥2 点

$a \leqq b \leqq 13$

$a, b \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$a+b=7$

であり，これをみたす素数の組 (a, b) は $(a, b)=(2, 5)$ のみである。

[2] $c=11$ のとき

a, b がみたす条件は

$a \leqq b \leqq 11$

$a, b \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$a+b=9$

であり，これをみたす素数の組 (a, b) は $(a, b)=(2, 7)$ のみである。

[3] $c=7$ のとき

a, b がみたす条件は

$a \leqq b \leqq 7$

$a, b \in \{2, 3, 5, 7\}$

$a+b=13$

であり，これをみたす素数の組 (a, b) は存在しない。

[4] $c=2, 3, 5$ のとき

$a+b+c \leqq 3c \leqq 15$

であり，$a+b+c \neq 20$ である。

以上, [1], [2], [3], [4]より，条件をみたす素数の組 (a, b, c) は

$(a, b, c)=(2, 5, 13), (2, 7, 11)$ (B)

である。求める素数の組 (x, y, z) の総数はこの並び替えを考えればよいから

$2 \cdot 3! = 12$ (個)

となる。

(答) 12 個(C)

(B)条件をみたす 3 つの素数の組 ‥2 点(各 1 点×2)

(C)答‥4 点

(3)

$w \geqq 1$ より，$xy=z$ かつ $x+y+z \leqq 19$ をみたす正の整数の組 (x, y, z) を考えればよい。ここで

$x+y+z \leqq 19$

$\Leftrightarrow x+y+xy \leqq 19$

$\Leftrightarrow (x+1)(y+1) \leqq 20$ (A)

となり，これをみたす (x, y) の組は，$x=y$ とすると

(3) 9 点 (A)(B)(C)

(A) $(x+1)(y+1) \leqq 20$ をみたす正の整数の組 (x, y) を求める方針‥2 点

$(1, 1), (2, 2), (3, 3)$

より 3 個(B 1/3)あり，$x < y$ とすると

$(1, 2), \cdots, (1, 9), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4)$

より $8+3+1=12$ (個)(B 2/3)ある。$y < x$ の場合も同様(B 3/3)に考えられる。z, w の値は (x, y) が決まれば1つに定まることから，以上より，求める正の整数の組の総数は

$3+12+12=27$ (個)

である。

(答) 27 個(C)

(B)条件をみたす (x, y) の組の総数
‥3 点(完答)

(C)答‥4 点

(3)[別解]

$xy = z$ のとき

$$w+x+y+z=20$$
$$\Leftrightarrow w+x+y+xy=20$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)=21-w$$

となる。したがって，$21-w$ が正の整数となるように正の整数 w を定めたとき，$21-w$ の1と $21-w$ 以外の正の約数の数だけ条件をみたす正の整数の組 (x, y) が存在する。(D)また，条件をみたす (x, y) が定まれば，各 (x, y) に対して正の整数 z はただ1つに定まる。よって，20 以下の各正の整数の，1とその数以外の正の約数の個数をすべて足し合わせたものが答えになる。20 以下の合成数は 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 であり，各数の1とその数以外の正の約数の個数を考えると

$1+2+2+1+2+4+2+2+3+4+4$ (E) $=27$ (個)

となる。

(答) 27 個(C)

(3)[別解] 9 点 (D)(E)(C)

(D) $21-w$ の約数の個数から条件をみたす正の整数の組 (x, y) を求める方針
‥2 点

(E) 20 以下の合成数の，1 とその数以外の正の約数の個数‥3 点(完答)

(C)答‥4 点

第２問　（２５点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$$f(x)=g(x)$$
$$\Leftrightarrow \left\{2x^2-ax+2a(a+2)\right\}-\left\{x^2+ax+(a+2)^2\right\}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2ax+(a-2)(a+2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a+2)(x-a-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=a-2,\ a+2$$ (A)・・・(答)

である。

(1)　3 点 (A)

(A)　$x=a-2,\ a+2$ ・・3 点

(2)

(1)より，C_1, C_2 が囲む領域は x 軸方向について $a-2 \leqq x \leqq a+2$ の範囲に広がっている。(A)よって，

$S(a)=0$

⇔「2 つの範囲 $a-2 \leqq x \leqq a+2$，$2a \leqq x \leqq 2a+1$ が端点を除いて共通部分をもたない」

⇔ $2a+1 \leqq a-2$　または　$a+2 \leqq 2a$

⇔ $a \leqq -3,\ 2 \leqq a$ (B)・・・(答)

となる。

(2)　5 点 (A)(B)

(A)　C_1, C_2 が囲む領域は x 軸方向について $a-2 \leqq x \leqq a+2$ の範囲に広がっている・・2 点

(B)　$a \leqq -3,\ 2 \leqq a$ ・・3 点

(3)

(2)より，$a \leqq -3$ においては常に $S(a)=0$ である。(A)

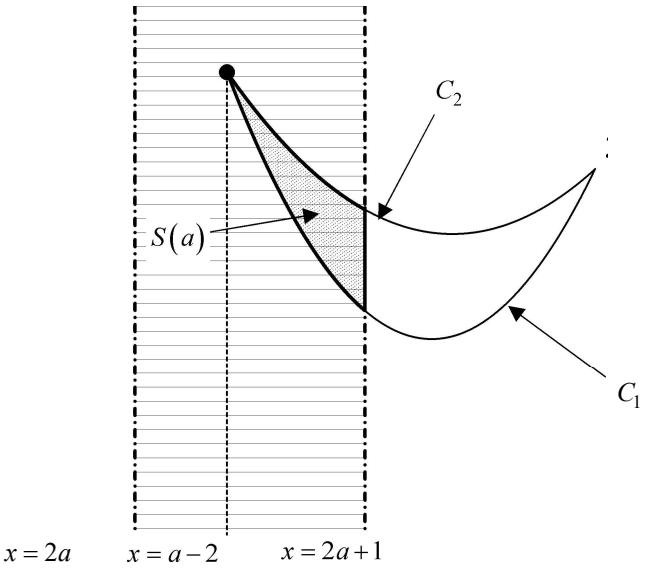
$-3<a<0$ のとき，$x=a-2$ に位置する C_1, C_2 の交点が範囲 $2a \leqq x \leqq 2a+1$ に含まれるか否かによって場合分けを行う。(B)

[1]　$2a \leqq a-2 \leqq 2a+1$，すなわち $-3<a \leqq -2 (\because -3<a)$ のとき

(3)　8 点 (A)(B)(C)(D)

(A)　$a \leqq -3$ では常に $S(a)=0$ ・・2 点

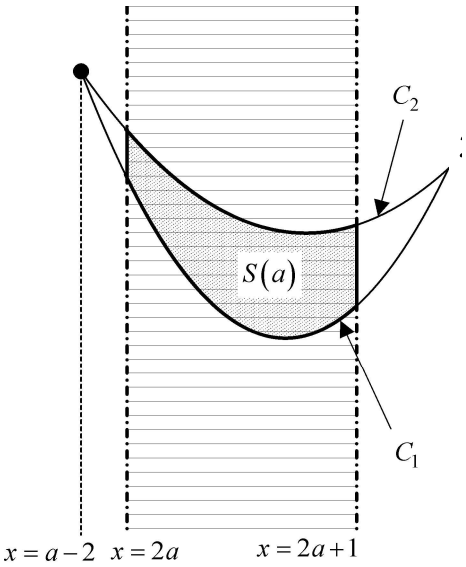
・(C),(D)とあわせて $a<0$ 全体において $S(a)$ をくまなく求められていれば、各範囲の等号の有無($<$ と $\leqq$、など)は問わない。(A),(C),(D)の範囲間での重複も減点せず、$a<0$ 全体を覆えていない場合のみ 1 度だけ 2 点減点する。



$$S(a)=\int_{a-2}^{2a+1}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{a-2}^{2a+1}\left(-x^2+2ax-a^2+4\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2+\left(-a^2+4\right)x\right]_{a-2}^{2a+1}$$
$$=\left(-\frac{2}{3}a^3-a^2+7a+\frac{11}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}a^3+4a-\frac{16}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}a^3-a^2+3a+9$$ (C)

となる。

[2] $a-2<2a$，すなわち $-2<a<0(\because a<0)$ のとき



このとき，$2a+1<a+2$ であるから，

(B) 場合分けの方針‥2 点

(C) $-3<a\leqq-2$ では

$S(a)=-\frac{1}{3}a^3-a^2+3a+9$ ‥2 点

$$S(a)=\int_{2a}^{2a+1}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{2a}^{2a+1}\left(-x^2+2ax-a^2+4\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2+\left(-a^2+4\right)x\right]_{2a}^{2a+1}$$
$$=\left(-\frac{2}{3}a^3-a^2+7a+\frac{11}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}a^3+8a\right)$$
$$=-a^2-a+\frac{11}{3}$$ (D)

となる。

以上, [1], [2]と $a\leqq-3$ の場合より，$a<0$ において $S(a)$ を a を用いて表すと,

$$S(a)=\begin{cases}0\ (a\leqq-3),\\ -\frac{1}{3}a^3-a^2+3a+9\ (-3<a\leqq-2),\\ -a^2-a+\frac{11}{3}\ (-2<a<0)\end{cases}$$ ・・・(答)

となる。

(D) $-2<a<0$ では

$S(a)=-a^2-a+\frac{11}{3}$ ・・2 点

(4)

(3)より，$a\leqq-3$ においては常に $S(a)=0$ である。(A)

また, (3)より，$-3<a\leqq-2$ においては $S(a)=-\frac{1}{3}a^3-a^2+3a+9$ である。したがって，$-3<a<-2$ において,

$$S'(a)=-a^2-2a+3=-(a-1)(a+3)$$

である。$-3<a<-2$ のとき，$a-1<0,\ 0<a+3$ であるから常に $S'(a)=-(a-1)(a+3)>0$ となる。(B)さらに，$-2<a<0$ においては $S(a)=-a^2-a+\frac{11}{3}$ であり，このとき $S'(a)=-2a-1$ である。(C)よって，$a<0$ において $S(a)$ が連続である(グラフに途切れ目がない)ことに注意すると，増減表は以下(D)のようになる。

a	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(0)
$S'(a)$	0		+		+		−	
$S(a)$	0	0	↗		↗	極大	↘	

(4) 9 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(A) $a\leqq-3$ では常に $S(a)=0$ ・・1 点

(B) $-3<a<-2$ での増減を正しく調べられている・・1 点

・$-3<a<-2$ において $S(a)$ が単調増加することを読み取れれば表現は問わない。

(C) $-2<a<0$ での増減を正しく調べられている・・1 点

・$-2<a<0$ において $S'(a)=-2a-1$ であることか，$S(a)$ が $-2<a<-\frac{1}{2}$ で増加し $-2<a<-\frac{1}{2}$ で減少することを書けていればよい。

以上より，$a<0$ においては，$S(a)$ は $a=-\frac{1}{2}$ において最大

(E) ・・・(答)となり，その最大値は

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{11}{3}=\frac{47}{12}$$ (F) ・・・(答)

である。

(D) 増減表が正しく描けている

・・2 点

(E) $a=-\frac{1}{2}$ において最大・・2 点

(F) 最大値は $\frac{12}{47}$ ・・2 点

３．（２５点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$$p_3+q_3i=(n+2i)^3$$
$$\Leftrightarrow\ p_3+q_3i=n^3-12n+(6n^2-8)i$$

より，複素数の相等から $p_3=n^3-12n$ (A)である。以下，合同式の法を 2 とする。

[1] n が偶数，つまり $n\equiv 0$ のとき

$$n^3-12n\equiv 0$$

より，n^3-12n も偶数(B)になる。

[2] n が奇数，つまり $n\equiv 1$ のとき

$$\begin{aligned}n^3-12n&\equiv 1^3-12\cdot 1\\&=-11\\&\equiv 1\end{aligned}$$

より，n^3-12n も奇数(C)になる。

以上[1], [2]より，$p_3=n^3-12n$ と n の偶奇は等しくなる。

(証明終)

(1) 8 点 (A)(B)(C)

(A) $p_3=n^3-12n$ ‥2 点

・過程は問わない

(B) n が偶数のとき p_3 は偶数‥3 点

(C) n が奇数のとき p_3 は奇数‥3 点

(1)[別解 1]

$$p_3+q_3i=(n+2i)^3$$
$$\Leftrightarrow\ p_3+q_3i=n^3-12n+(6n^2-8)i$$

より，複素数の相等から $p_3=n^3-12n$ (A)である。

[1] n が偶数のとき

自然数 n' を用いて $n=2n'$ と表せる。このとき

$$\begin{aligned}n^3-12n&=(2n')^3-12\cdot 2n'\\&=8n'^3-24n'\\&=2(4n'^3-12n')\end{aligned}$$

より，n^3-12n は偶数(B)になる。

[2] n が奇数のとき

自然数 n' を用いて $n=2n'-1$ と表せる。このとき

(1)[別解 1] 8 点 (A)(B)(C)

(A) $p_3=n^3-12n$ ‥2 点

・過程は問わない

(B) n が偶数のとき p_3 は偶数‥3 点

$$n^3-12n=(2n'-1)^3-12(2n'-1)$$
$$=(8n'^3-12n'^2+6n'-1)-(24n'-12)$$
$$=2(4n'^3-6n'^2-9n'+6)-1$$

より，n^3-12n は奇数(C)になる。

以上[1], [2]より，$p_3=n^3-12n$ と n の偶奇は等しくなる。

(証明終)

(C) n が奇数のとき p_3 は奇数‥3 点

(1)[別解 2]

$$p_3+q_3i=(n+2i)^3$$
$$\Leftrightarrow\ p_3+q_3i=n^3-12n+(6n^2-8)i$$

より，複素数の相等から $p_3=n^3-12n$ (A)である。ここで

$$p_3-n=(n^3-12n)-n$$
$$=(n^3-n)-12n$$
$$=(n-1)n(n+1)-12n$$

である。ここで，$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 整数の積であり，$n-1,\ n,\ n+1$ のいずれかは偶数であるから $(n-1)n(n+1)$ も偶数となる。また，$12n$ も同様に偶数である。したがって p_3-n も偶数(B)となり，$p_3=n^3-12n$ と n の偶奇は等しくなる。

(証明終)

(1)[別解 2]　8 点 (A)(B)

(A) $p_3=n^3-12n$ ‥2 点

・過程は問わない

(B) p_3-n は偶数‥6 点

(2)

二項定理より，自然数 n について

$$(n+2i)^7=\sum_{t=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_t\cdot n^{7-t}(2i)^t \quad \text{(A)}$$

となる。これを $a(t)={}_7\mathrm{C}_t\cdot n^{7-t}\cdot 2^t$ を用いて表すと

$$(n+2i)^7$$
$$=\sum_{t=0}^{7}a(t)\cdot i^t$$
$$=a(0)+a(1)i-a(2)-a(3)i+a(4)+a(5)i-a(6)-a(7)i \quad \text{(B)}$$

となるから，複素数の相等より $(n+2i)^7$ の虚部 q_7 は

$$q_7=a(1)-a(3)+a(5)-a(7) \quad \text{(C)}$$

となる。

(証明終)

(2)　8 点 (A)(B)(C)(D)

(A) $(n+2i)^7=\sum_{t=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_t\cdot n^{7-t}(2i)^t$ ‥2 点

(B) $(n+2i)^7$ を $a(1),\ a(2),\ \cdots,\ a(7)$ を用いて表して‥3 点

・$(n+2i)^7=\sum_{t=0}^{7}a(t)\cdot i^t$ でも可

(C) $q_7=a(1)-a(3)+a(5)-a(7)$ を正しく証明して‥3 点

(3)

(2)より

(3)　9 点 (A)(B)(C)

$$q_7 = a(1) - a(3) + a(5) - a(7)$$

である。$t \geqq 2$ のとき $a(t) = {}_7\mathrm{C}_t \cdot n^{7-t} \cdot 2^t$ は 4 で割り切れる(A)ことから，q_7 を 4 で割った余りは $a(1) = 7 \cdot n^6 \cdot 2 = 14n^6$(B)を 4 で割った余りと等しい。以下，合同式の法を 4 とすると，n は正の奇数であるから，$n \equiv \pm 1$ である。このとき

$$\begin{aligned} q_7 &\equiv 14 \cdot (\pm 1)^6 \\ &\equiv 2 \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となり，q_7 を 4 で割った余りは 2(C)となる。

(証明終)

(A) $t \geqq 2$ **のとき** $a(t)$ **は** 4 **で割り切れる**
・・3 点
・「$t \geqq 3$ **のとき」としても可**
(B) $a(1) = 14n^6$ **・・2 点**

(C) q_7 **を** 4 **で割った余りが** 2 **であることを正しく証明して・・4 点**

(3)[別解]

(2)より

$$q_7 = a(1) - a(3) + a(5) - a(7)$$

である。$t \geqq 2$ のとき $a(t) = {}_7\mathrm{C}_t \cdot n^{7-t} \cdot 2^t$ は 4 で割り切れる(A)ことから，q_7 を 4 で割った余りは $a(1) = 7 \cdot n^6 \cdot 2 = 14n^6$(B)を 4 で割った余りと等しい。ここで，$n$ は正の奇数であり，2 を素因数にもたないから，n^6 も 2 を素因数にもたず，奇数である。このとき 0 以上の整数 s を用いて $n^6 = 2s + 1$ と表せて，

$$a(1) = 14n^6 = 14(2s+1) = 4(7s+3) + 2$$

より，$a(1)$ を 4 で割った余りは 2 となる。したがって，同様に q_7 を 4 で割った余りも 2(C)となる。

(証明終)

(3)[別解]　9 点 (A)(B)(C)

(A) $t \geqq 2$ **のとき** $a(t)$ **は** 4 **で割り切れる**
・・3 点
・「$t \geqq 3$ **のとき」としても可**
(B) $a(1) = 14n^6$ **・・2 点**

(C) q_7 **を** 4 **で割った余りが** 2 **であることを正しく証明して・・4 点**