2022 年第 4 回早慶上理・難関国公立大模試

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（100 点満点）

第 1 問（40 点満点）

（1）（配点 10 点）

（2）（配点 10 点）

（3）（配点 10 点）

（4）（配点 10 点）

第 2 問（30 点満点）

（1）（配点 8 点）

- $\displaystyle\int_0^1 t|x+t|dt$ を絶対値を外した形で表して 4 点
- 答えに 4 点

（2）（配点 14 点）

- $x<-1$, $x>0$ のとき $f(x)$ をそれぞれ求めて 8 点(各 4 点)
- $f(x)$ の $-1 \leqq x \leqq 0$ における増減を調べて 4 点
- グラフに 2 点

（3）（配点 8 点）

- S を求める定積分の式を立てて 3 点
- 答えに 5 点

第 3 問（30 点満点）

（1）（配点 12 点）

- 放物線の式を平方完成して 2 点
- P の x 座標，y 座標をそれぞれ a で表して 2 点
- 上記から a を消去し，P の x 座標と y 座標の関係式を求めて 2 点
- 求める軌跡を述べて 4 点
- 図示に 2 点

（2）（配点 18 点）

(i)（配点 9 点）

- 円Cの式を標準形(中心と半径が分かる形)に直して 2 点
- CとDが点$(1, 9)$で接するときのbの値を求めて 2 点
- CがDと異なる 2 点で接するときのbの値を求めて 5 点

(ii) (配点 9 点)

- 図 1 のようにCとDが異なる 2 点で交わるbの値の範囲を求めて 3 点
- 図 2 のようにCが点$(-1, 1)$を通ってDと異なる 2 点で交わるbの値を求めて 3 点
- 図 4 のようにCとDが異なる 2 点で交わるbの値の範囲を求めて 3 点

【理系】（200 点満点）

第 1 問（40 点満点）

（1）（配点 10 点）

（2）（配点 10 点）

（3）（配点 10 点）

（4）（配点 10 点）

第 2 問（40 点満点）

（1）（配点 10 点）

（2）（配点 10 点）

（3）（配点 10 点）

（4）（配点 10 点）

第 3 問（40 点満点）

（1）（配点 10 点）

- 置換積分，または直接計算する途中の過程に 6 点
- 答えに 4 点

（2）（配点 14 点）

- $k \geqq 1, (k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi$ のとき，$\{(k-1)\pi\}^2 \leqq x^2 \leqq (k\pi)^2$ を述べて 3 点
- 上記から $\dfrac{|\sin x|^3}{(k^2+n^2)\pi^2} \leqq \dfrac{|\sin x|^3}{x^2+(n\pi)^2} \leqq \dfrac{|\sin x|^3}{\{(k-1)^2+n^2\}\pi^2}$ を導いて 3 点
- $(k-1)\pi < x < k\pi$ のとき

  $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|^3}{(k^2+n^2)\pi^2}dx < \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|^3}{x^2+(n\pi)^2}dx < \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|^3}{\{(k-1)^2+n^2\}\pi^2}dx$ を導いて 3 点
- 残りの証明に 5 点

（3）（配点 16 点）

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3(k^2+n^2)\pi^2} < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3\{(k-1)^2+n^2\}\pi^2}$ を導いて 2 点
- $\displaystyle\frac{4}{3\pi^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2} < \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|^3}{x^2+(n\pi)^2}dx < \frac{4}{3\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$ を導いて 4 点
- $n \to \infty$ としたとき，④の式の左辺または右辺が $\displaystyle\frac{4}{3\pi^2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ となることを述べて 4 点
- 残りの計算と答えに 6 点

第 4 問（40 点満点）

（1）（配点 12 点）

- AP＝BP から $|\gamma-1| = |\gamma-\alpha|$ であることを求めて 3 点
- 上記の両辺を 2 乗して $(\gamma-1)(\overline{\gamma-1}) = (\gamma-\alpha)(\overline{\gamma-\alpha})$ まで変形して 2 点

- $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ を述べ，$\overline{\alpha}$ を消去した式を求めて 4 点
- 残りの証明に 3 点

(2)（配点 12 点）

- $\mathrm{D}(\beta)$ が l, C 上にあることを，それぞれ複素数の式で表して 6 点(各 3 点)
- 上記の 2 つの式から $\overline{\beta}$ を消去した式に 3 点
- 答えに 3 点

(3)（配点 16 点）

- $\mathrm{AB}=\mathrm{BD}$ と(2)から $|\alpha-1|=|\alpha+2|$ を求めて 4 点
- α を求めて 2 点
- $\triangle\mathrm{ABD}$ が正三角形のとき，3 点 A, B, D を通る円の中心を表す複素数を求めて 2 点
- $\mathrm{Q}(z)$ の表す円の方程式を求めて 2 点
- $z'=z+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ のようにおいたとき，z' の表す円の方程式を求めて 2 点
- 上記の z' の偏角のとり得る値の範囲を求め，さらに w の偏角のとり得る値の範囲を求めて 4 点(各 2 点)

第 5 問（40 点満点）

(1)（配点 10 点）

- p_1 を求めて 3 点
- p_2 を求めて 7 点

(2)（配点 15 点）

- 1 回目に白玉を取り出したとき，赤玉を取り出したときそれぞれについて $n+2$ 回で作業が終了しない確率をそれぞれ p_{n+1}, p_n で表して 10 点(各 5 点)
- 答えに 5 点

(3)（配点 15 点）

- (2)で求めた漸化式を②または③の形に変形して 4 点(各 2 点)
- ②，③から p_{n+1}, p_n の 2 つの関係式を導いて 6 点(各 3 点)
- 答えに 5 点

第 6 問（40 点満点）

(1)（配点 10 点）

- x, y の満たす 2 つの等式をそれぞれ 2 乗した式に 4 点(各 2 点)
- 上記で求めた 2 つの式を加え，$\cos(y-x)$ の値を求めて 4 点
- $\sin(y-x)$ の値を求めて 2 点

(2)（配点 15 点）

- $y-x$ を一般角で表して 3 点
- 上記から y を消去した 2 つの等式から，$\sin x$, $\cos x$ の値をそれぞれ求めて 8 点(各 4 点)

- 答えに 4 点

（3）（配点 15 点）

- y を α で表して 2 点
- $x+y$ を α で表して 3 点
- $\tan 2\alpha,\ \tan\frac{5}{12}\pi$ の値を求め，さらに $\tan\frac{\pi}{3}<\tan 2\alpha<\tan\frac{5}{12}\pi$ を示して 7 点
- 残りの証明に 3 点

第 7 問（40 点満点）

（1）（配点 10 点）

- $\int_0^1 t\,|x+t\,|dt$ を絶対値を外した形で表して 5 点
- 答えに 5 点

（2）（配点 20 点）

- $x<-1,\ x>0$ のとき $f(x)$ をそれぞれ求めて 10 点(各 5 点)
- $f(x)$ の $-1 \leqq x \leqq 0$ における増減を調べて 6 点
- グラフに 4 点

（3）（配点 10 点）

- S を求める定積分の式を立てて 4 点
- 答えに 6 点

第 8 問（40 点満点）

（1）（配点 16 点）

- 放物線の式を平方完成して 2 点
- P の x 座標，y 座標をそれぞれ a で表して 2 点
- 上記から a を消去し，P の x 座標と y 座標の関係式を求めて 3 点
- 求める軌跡を述べて 6 点
- 図示に 3 点

（2）（配点 24 点）

（i）（配点 12 点）

- 円 C の式を標準形(中心と半径が分かる形)に直して 2 点
- C と D が点 $(1,\,9)$ で接するときの b の値を求めて 3 点
- C が D と異なる 2 点で接するときの b の値を求めて 7 点

（ii）（配点 12 点）

- 図 1 のように C と D が異なる 2 点で交わる b の値の範囲を求めて 4 点
- 図 2 のように C が点 $(-1,\,1)$ を通って D と異なる 2 点で交わる b の値を求めて 4 点
- 図 4 のように C と D が異なる 2 点で交わる b の値の範囲を求めて 4 点