広島大本番レベル模試(理系)

解答・解説・採点基準

全５問　１５０分　２００点満点

［１］　（４０点）

【解答・採点基準】

(1) 解と係数の関係より， $a_n a_{n+1}{}^2 = 1$　　　・・・① が成り立つ。また，問題文の条件から a_{n+1} は実数であり，①より $a_{n+1} \neq 0$ であるから $a_{n+1}{}^2 > 0$ となる。したがって，$a_n = \dfrac{1}{a_{n+1}{}^2} > 0$ となる。以上より，すべての n について $a_n > 0$ であることが示された。 （証明終）	(1)　8点 $a_{n+1}{}^2 > 0$ を示して・・2点 証明終・・6点
(1)[別解] 背理法を利用して，すべての n について $a_n > 0$ であることを示す。すなわち，ある n が存在して，$a_n \leqq 0$ となると仮定して矛盾を導く。ここで，$f(x) = x^2 - b_n x + 1$ とおく。このとき $f(0) = 1 > 0$ であるから，xy 平面において２次関数 $y = f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は，２つとも正の実数または２つとも負の実数である。 [1] $a_n = 0$ の場合 $f(0) = 1 > 0$ より反する。 [2] $a_n < 0$ の場合 問題文の条件から a_{n+1} は実数である。また解と係数の関係より $a_n a_{n+1}{}^2 = 1$ となり，このとき $a_{n+1} \neq 0$ であるから $a_{n+1}{}^2 > 0$ となる。したがって，$f(x) = 0$ は正の実数解と負の実数解を１つずつもつ。これは，xy 平面において２次関数 $y = f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は，２つとも正の実数または２つとも負の実数であることに反する。	(1)[別解]　8点 背理法を用いる方針・・2点 $a_n = 0$ の場合に言及して・・2点 $a_n < 0$ の場合に言及して・・2点 $a_{n+1}{}^2 > 0$ を示して・・2点

以上, [1], [2]より，すべての n について $a_n>0$ であることが示された。 (証明終)	
(2)	(2)　10 点
解と係数の関係より， $$\begin{cases} a_n+{a_{n+1}}^2=b_n & \cdots ② \\ a_n{a_{n+1}}^2=1 & \cdots ③ \end{cases}$$	$a_n{a_{n+1}}^2=1$‥4 点
となる。(1)より，$a_n>0,\ a_{n+1}>0$ であるから，③について両辺の自然対数をとると， $$\log a_n+2\log a_{n+1}=0$$ $$\Leftrightarrow \log a_{n+1}=-\frac{1}{2}\log a_n$$ となる。	$a_n>0,\ a_{n+1}>0$ より③の両辺について 2 を底とする対数をとる方針‥2 点
(答)　$\log a_{n+1}=-\frac{1}{2}\log a_n$	答‥4 点
(3)	(3)　12 点
$\log a_{n+1}=-\frac{1}{2}\log a_n$ について，$c_n=\log a_n$ とおくと $$c_{n+1}=-\frac{1}{2}c_n$$ である。ただし，$c_1=\log a_1=-\frac{1}{2}$ である。したがって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから	等比数列であることに言及して‥2 点
$$c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ $$=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$ と求まる。したがって $$c_n=\log a_n$$ $$\Leftrightarrow a_n=e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$ となる。また，②，③より	

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n + {a_{n+1}}^2 \\
&= a_n + \frac{1}{a_n} \\
&= e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} + e^{-\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \\
&= e^{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n} + e^{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n} \\
&= e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}
\end{aligned}
$$

$a_n + {a_{n+1}}^2 = b_n$ ・・4 点

である。

(答) $a_n = e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$, $b_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

（$b_n = e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} + e^{-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ も可）

答・・6 点

（各 3 点×2）

(4)

(4)　10 点

$a_n = e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
a_1 a_2 \cdots a_{m-1} a_m &= e^{\left(-\frac{1}{2}\right)} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdots e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^m} \\
&= e^{\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^m} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^m}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}} \\
&= e^{-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right\}}
\end{aligned}
$$

$a_1 a_2 \cdots a_{m-1} a_m = e^{-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right\}}$ ・・6 点

となる。したがって，

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} a_1 a_2 \cdots a_{m-1} a_m &= \lim_{m\to\infty} e^{-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right\}} \\
&= e^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $\lim_{m\to\infty} a_1 a_2 \cdots a_{m-1} a_m = e^{-\frac{1}{3}}$

答・・4 点

［２］　（４０点）

【解答・採点基準】

(1)

(1)　5点

$\angle B + \angle C = 3\theta$ より，$0 < 3\theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ $0 < 3\theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$

である。

(答)　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$

答‥5点

(2)

(2)　10点

三角形 ABC について，正弦定理より，

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = 2 \Leftrightarrow AB = 2\sin\theta$$
$$\frac{AC}{\sin\angle B} = 2 \Leftrightarrow AC = 2\sin 2\theta$$
$$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2 \Leftrightarrow BC = 2\sin(\pi - 3\theta) = 2\sin 3\theta$$

AB, BC, CA のうち2つの長さを求めて‥6点（各3点×2）

が成り立つ。したがって，三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sin\angle A \cdot AB \cdot AC \\ &= \frac{1}{2}\sin(\pi - 3\theta)\cdot 2\sin\theta \cdot 2\sin 2\theta \\ &= 2\sin\theta\sin 2\theta\sin 3\theta \end{aligned}$$

となる。

(答)　$2\sin\theta\sin 2\theta\sin 3\theta$

答‥4点

(3)

(3)　11点

三角形 ABC の内接円の半径を r とすると，

$$S = \frac{1}{2}r(AB + BC + CA)$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\theta\sin 2\theta\sin 3\theta = \frac{1}{2}r(2\sin\theta + 2\sin 2\theta + 2\sin 3\theta)$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{2\sin\theta\sin 2\theta\sin 3\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta} \quad (\because \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta \neq 0)$$

AB, BC, CA のうち(2)で求めていないものの長さを求めて‥3点

r を θ を用いて表して‥4点

が成り立つ。ここで，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ より $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta \neq 0$ であることに注意すると，

$$\frac{2\sin\theta\sin 2\theta\sin 3\theta}{\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta}=\frac{2\sin 2\theta\sin 3\theta}{1+2\cos\theta+3-4\sin^2\theta}\ (\because \sin\theta\neq 0)$$

$$=\frac{4\sin\theta\cos\theta\sin 3\theta}{2\cos\theta+4\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{1+2\cos\theta}\ (\because \cos\theta\neq 0)$$

$$=\frac{2\sin^2\theta\left(3-4\sin^2\theta\right)}{1+2\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\theta\left(4\cos^2\theta-1\right)}{1+2\cos\theta}$$

$$=2\sin^2\theta\left(2\cos\theta-1\right)$$

$$=2\left(1-\cos^2\theta\right)\left(2\cos\theta-1\right)$$

より，$\cos\theta=t$ とおくと，$r=2\left(1-t^2\right)\left(2t-1\right)$ となる。

(答)　$2\left(1-t^2\right)\left(2t-1\right)$　　　答・・4 点

(4)　　　(4)　14 点

(3)より，$f(t)=\left(1-t^2\right)\left(2t-1\right)$ とすれば，

$$f(t)=-2t^3+t^2+2t-1$$

$$f'(t)=-6t^2+2t+2$$

$$=-2\left(3t^2-t-1\right)$$

$f'(t)$・・4 点

であるから，$t=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$ において，$f'(t)=0$ となる。したがって，

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ より $\frac{1}{2}<t<1$ であることに注意すると $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{13}}{6}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(0)	↗	$f\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$	↘	(0)

増減表・・5 点

以上より，三角形 ABC の内接円の半径 r が最大となるとき，

$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$ である。

(答)　$\frac{1+\sqrt{13}}{6}$　　　答・・5 点

［３］　（４０点）

【解答・採点基準】

(1)

$f(t)=e^t-t-1$ とおくと，$f'(t)=e^t-1$ より，$f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	0	↗

したがって，すべての実数 t について $f(t)\geqq 0$ より，$1+t\leqq e^t$ である。また，不等式 $1+t\leqq e^t$ について，t を $t-1$ と置き換えれば，$t\leqq e^{t-1}\Leftrightarrow et\leqq e^t$ となる。

(証明終)

(1)[別解]

$(1+t\leqq e^t$ については本解と同様)

$g(t)=e^t-et$ とおくと，$g'(t)=e^t-e$ より，$g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	0	↗

したがって，すべての実数 t について $g(t)\geqq 0$ より，$et\leqq e^t$ である。

(証明終)

(2)

e^t は t について単調増加であるから，e^t と e^{t^2} の大小は，t と t^2 の大小にそのまま対応する。t と t^2 の大小については，$t^2-t=t(t-1)$ より，

(1)　10 点

$f(t)$ の増減表・・5 点

t を $t-1$ と置き換えて証明・・5 点

(1)[別解]　10 点

$1+t\leqq e^t$・・5 点

$g(t)$ の増減表・・5 点

(2)　10 点

e^t と e^{t^2} の大小関係と，t と t^2 の大小関係が一致することを述べて・・5 点

$$\begin{cases} t<0,\,1<t \text{ のとき，} & t^2>t \\ t=0,\,1 \text{ のとき，} & t^2=t \\ 0<t<1 \text{ のとき，} & t^2<t \end{cases}$$

となる。したがって，e^t と e^{t^2} の大小は

$$\begin{cases} t<0,\,1<t \text{ のとき，} & e^{t^2}>e^t \\ t=0,\,1 \text{ のとき，} & e^{t^2}=e^t \\ 0<t<1 \text{ のとき，} & e^{t^2}<e^t \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

答‥5 点

(2)[別解 1]

(2)[別解 1]　10 点

$g(t)=\dfrac{e^{t^2}}{e^t}=e^{t^2-t}$ とおくと，$g(t)>0$ より

$$\begin{cases} g(t)>1 \text{ のとき，} & e^{t^2}>e^t \\ g(t)=1 \text{ のとき，} & e^{t^2}=e^t \\ g(t)<1 \text{ のとき，} & e^{t^2}<e^t \end{cases}$$

となる。そこで，$g(t)$ の増減を調べる。$g'(t)=(2t-1)e^{t^2-t}$ より，$g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(t)$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

$g(t)$ の増減表‥5 点

したがって，

$$\begin{cases} t<0,\,1<t \text{ のとき，} & g(t)>1 \\ t=0,\,1 \text{ のとき，} & g(t)=1 \\ 0<t<1 \text{ のとき，} & g(t)<1 \end{cases}$$

であるから，e^t と e^{t^2} の大小は

$$\begin{cases} t<0,\,1<t \text{ のとき，} & e^{t^2}>e^t \\ t=0,\,1 \text{ のとき，} & e^{t^2}=e^t \\ 0<t<1 \text{ のとき，} & e^{t^2}<e^t \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

答‥5 点

(2)[別解 2]

$h(t)=e^{t^2}-e^t$ とおくと，

$$\begin{cases} h(t)>0 \text{ のとき，} e^{t^2}>e^t \\ h(t)=0 \text{ のとき，} e^{t^2}=e^t \\ h(t)<0 \text{ のとき，} e^{t^2}<e^t \end{cases}$$

となる。そこで，$h(t)$ の増減を調べる。このとき，

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2te^{t^2}-e^t \\ &= e^t\left(2te^{t^2-t}-1\right) \end{aligned}$$

であり，$h'(t)$ と $2te^{t^2-t}-1$ の符号は一致する。ここで，

$i(x)=2te^{t^2-t}-1$ とおくと

$$\begin{aligned} i'(x) &= 2e^{t^2-t}+2t(2t-1)e^{t^2-t} \\ &= 2\left(2t^2-t+1\right)e^{t^2-t} \\ &= 2\left\{2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right\}e^{t^2-t} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから，$h'(t)$ は単調増加する。$h'(0)=-1,\ h'(1)=e>0$ より，

$h'(\alpha)=0\ (0<\alpha<1)$ となる実数 α が存在する。よって $h(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$h(t)$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$

したがって，

$$\begin{cases} t<0,\ 1<t \text{ のとき，} h(t)>0 \\ t=0,\ 1 \text{ のとき，} h(t)=0 \\ 0<t<1 \text{ のとき，} h(t)<0 \end{cases}$$

であるから，e^t と e^{t^2} の大小は

$$\begin{cases} t<0,\ 1<t \text{ のとき，} e^{t^2}>e^t \\ t=0,\ 1 \text{ のとき，} e^{t^2}=e^t \\ 0<t<1 \text{ のとき，} e^{t^2}<e^t \end{cases}$$

となる。

(2)[別解 2]　10 点

$h(t)$ の増減表

‥5 点

(答) 前述

答･･5 点

(3)

(3)　20 点

(2)より，$0 \leqq x \leqq 1$ において $e^{x^2} \leqq e^x$ であり，等号が成立するのは端点のみであるから，

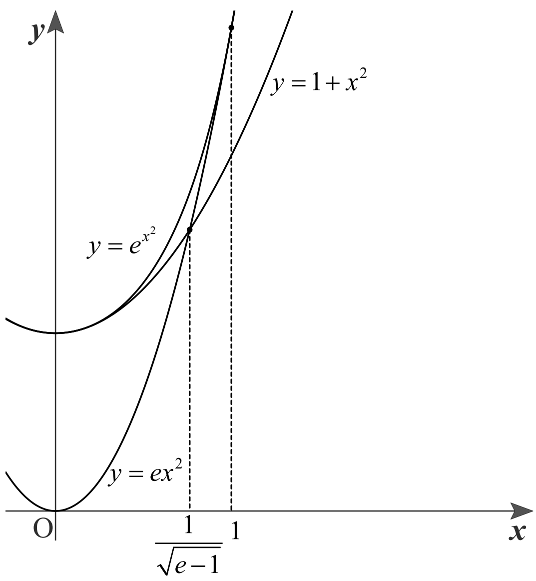
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx < \int_0^1 e^x\,dx$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}\,dx < e-1$$

$\int_0^1 e^{x^2}\,dx < e-1$ ･･5 点

が成り立つ。また，(1)より $1+t \leqq e^t$, $et \leqq e^t$ であるから，それぞれ t を x^2 に置き換えると，

$$1+x^2 \leqq e^{x^2}$$
$$ex^2 \leqq e^{x^2}$$

となる。したがって，3 つの曲線 $y=1+x^2$, $y=ex^2$, $y=e^{x^2}$ を図示すると以下のようになる。



図･･5 点

（ e^{x^2}, $1+x^2$, ex^2 の大小関係が明示されていれば図はなくてもよい）

ここで，$y=1+x^2$ と $y=ex^2$ $y=ex^2$ の交点の x 座標は，

$$1+x^2=ex^2$$
$$\Leftrightarrow (e-1)x^2-1=0$$
$$\therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{e-1}}$$

である。上図より，

下からの評価を正しく立式して･･5 点

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{e-1}}}(1+x^2)dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{e-1}}}^1 ex^2dx<\int_0^1 e^{x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow\left[x+\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{e-1}}}+\left[\frac{e}{3}x^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{e-1}}}^1<\int_0^1 e^{x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{e-1}}+\frac{1}{3(e-1)\sqrt{e-1}}+\frac{e}{3}-\frac{e}{3(e-1)\sqrt{e-1}}<\int_0^1 e^{x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow\frac{e}{3}+\frac{2}{3\sqrt{e-1}}<\int_0^1 e^{x^2}dx$$

とわかる。よって，$\frac{e}{3}+\frac{2}{3\sqrt{e-1}}<\int_0^1 e^{x^2}dx<e-1$であることが示された。

(証明終)

正しく計算して

・・5 点

［4］　（４０点）

【解答・採点基準】

(1)

1回目の試行で捨てられたカードを x，そのカードが入っていた箱を箱 α，もう1つの箱を箱 β とする。x より大きいカードは，箱 α に入っていないから，x より大きいカードは箱 β に入っていたこととなる。ここで x† 3 とすると，箱 β に $4, 5$ が入っていたことになるが，$1+2+3+4+5=15,\ 4+5=9,\ 15<9\cdot2$ に気を付けると，箱 β の合計の方が大きいこととなり，箱 α のカードが捨てられたことに矛盾する。よって $x=4, 5$ のいずれかとなる。$x=4$ となる場合を考える。箱 β に5が入っており，$\dfrac{15}{2}=7.5$ より，合計が7以下となっているパターンである。これは，箱 β に，$\{5\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}$ のいずれかが入っている場合のみである。箱 β が箱 A, B のいずれかであることを考えれば，$x=4$ となるのは，$3\cdot2=6$ 通りである。一方で，全体で $2^5=32$ 通りであるから，$x=5$ となるのは，$32-6=26$ 通りである。以上より，1回の試行の後のカードの組としてあり得るのは，

$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}$ であり，それぞれ起こる確率は $\dfrac{13}{16}, \dfrac{3}{16}$ となる。

(答) あり得る組: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}$

それぞれの確率: $\dfrac{13}{16}, \dfrac{3}{16}$

(2)

1回の試行の後のカードの組で場合分けを行う。

[1] $\{1, 2, 3, 4\}$ の場合

2回目の試行に対して，x, α, β を(1)と同様に定める。x† 2 とすると，(1)と同様の議論から矛盾する。よって $x=3, 4$ のいずれかとなる。$x=3$ となる場合を考えると，$1+2+3+4=10$ であるから，箱 β に $\{4\}$ が入っている場合か，β が B で箱 β に $\{1, 4\}$ が入っている場合の3通りである。一方で，全体で $2^4=16$ 通りであるから，$x=4$ となるのは，$16-3=13$ 通りである。よって，

(1)　8点

取り出されるカードは4か5である‥2点

5が取り出されるパターンの列挙‥2点

あり得る組‥2点(完答)

確率‥2点(完答)

(2)　16点

$\{1, 2, 3, 4\}$ のとき，取り出さるカードは3か4である。‥2点

$\{1, 2, 3, 4\}$ のとき，4が取り出されるパターンの列挙‥4点

この場合の 2 回の試行の後のカードの組としてあり得るのは，$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$ であり，それぞれ起こる確率は，$\frac{13}{16}\cdot\frac{13}{16}, \frac{13}{16}\cdot\frac{3}{16}$ である。

[2] $\{1, 2, 3, 5\}$ の場合

2 回目の試行に対して，x, α, β を(1)と同様に定める。$x\dagger 2$ とすると，(1)と同様の議論から矛盾する。よって $x=3, 5$ のいずれかとなる。$x=3$ となる場合を考えると，$1+2+3+5=11$ であるから，箱 β に $\{5\}$ が入っている場合の 2 通りである。一方で，全体で $2^4=16$ 通りであるから，$x=4$ となるのは，$16-2=14$ 通りである。よって，この場合の 2 回の試行の後のカードの組としてあり得るのは，$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}$ であり，それぞれ起こる確率は，$\frac{3}{16}\cdot\frac{7}{8}, \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{8}$ である。

$\{1, 2, 3, 5\}$ のとき，取り出さるカードは 3 か 4 である。・・2 点

$\{1, 2, 3, 5\}$ のとき，4 が取り出されるパターンの列挙・・2 点

[1][2]より，2 回の試行の後のカードの組としてあり得るのは，$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}$ であり，それぞれの確率は

$$\frac{13}{16}\cdot\frac{13}{16}+\frac{3}{16}\cdot\frac{7}{8}=\frac{169+42}{256}=\frac{211}{256}, \frac{13}{16}\cdot\frac{3}{16}=\frac{39}{256}, \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{128}$$ である。

(答) あり得る組: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}$

それぞれの確率: $\frac{211}{256}, \frac{39}{256}, \frac{3}{128}$

あり得る組・・3 点(完答)

確率・・3 点(完答)

(3)

(3) 16 点

3 回の試行の後，$\{1, 2\}$ が残っているパターンを，2 回の試行の後のカードの組で場合分けを行って考える。

[1] $\{1, 2, 3\}$ の場合

2 回目の試行に対して，x, α, β を(1)と同様に定める。$x=1$ とすると，(1)と同様の議論から矛盾する。よって $x=2, 3$ のいずれかとなる。$x=2$ となる場合を考えると，$1+2+3=6$ であるから，β が B で箱 β に $\{3\}$ が入っている場合の 1 通りである。一方で，全体で $2^3=8$ 通りであるから，$x=3$ となるのは，$8-1=7$ 通りである。よって，この場合の 3 回の試行の後のカードの組としてあり得るのは，$\{1, 2\}, \{1, 3\}$ であり，それぞれ起こる確率

$\{1, 2, 3\}$ のとき，取り出さるカードは 2 か 3 である。・・2 点

$\{1, 2, 3, 4\}$ のとき，4 が取り出されるパターンの列挙・・2 点

は，$\dfrac{211}{256}\cdot\dfrac{7}{8}$, $\dfrac{211}{256}\cdot\dfrac{1}{8}$ である。

[2]　$\{1, 2, 4\}$ の場合

$1+2+4=7$, $7<4\cdot 2$ より，必ず 4 が捨てられる。よってこの場合の 3 回の試行の後のカードの組としてあり得るのは，$\{1, 2\}$ のみであり，起こる確率は，$\dfrac{39}{256}$ である。

[3]　$\{1, 2, 5\}$ の場合

$1+2+5=8$, $8<5\cdot 2$ より，必ず 5 が捨てられる。よってこの場合の 3 回の試行の後のカードの組としてあり得るのは，$\{1, 2\}$ のみであり，起こる確率は，$\dfrac{3}{128}$ である。

[1][2][3]より，3 回の試行の後, $\{1, 2\}$ が残っている確率は，

$\dfrac{211}{256}\cdot\dfrac{7}{8}+\dfrac{39}{256}+\dfrac{3}{128}=\dfrac{1477+312+48}{2048}=\dfrac{1837}{2048}$ である。一方で，3 回の試行の後, $\{1, 2\}$ が残っており，かつ 2 回の試行の後, $\{1, 2, 3\}$ が残っていた確率は $\dfrac{1477}{2048}$ であったので，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1477}{2048}}{\frac{1837}{2048}}=\frac{1477}{1837}$$ となる。

(答)　$\dfrac{1477}{1837}$

$\{1, 2, 4\}$ のとき，取り出さるカードは 4 である。

‥2 点

$\{1, 2, 5\}$ のとき，取り出さるカードは 4 である。

‥2 点

$\{1, 2\}$ が残っている確率‥3 点

$\{1, 2\}$ が残っており，かつ $\{1, 2, 3\}$ が残っていた確率

‥3 点

答‥2 点

［５］　（４０点）

【解答・採点基準】

(1)

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ でないとき，三角形 OPQ は成立するので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \text{ と } \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \text{ が平行でない} \Leftrightarrow 3a \neq 2b$$

である。さらに，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}|3a-2b| = \left|\frac{3}{2}a-b\right|$$

であるから，a が偶数であれば三角形 OPQ の面積は整数になる。

(答)　$3a \neq 2b$，a が偶数

(1)　4点

答‥4点(各2点×2)

(2)

三角形 OPQ の面積が 1 となるとき，

$$\frac{1}{2}|3a-2b| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=2 & \cdots ① \\ 3a-2b=-2 & \cdots ② \end{cases}$$

となる。①について，$3a-2b=2 \Leftrightarrow 3a=2(b+1)$ より，2, 3 が互いに素であるから，整数 k を用いて

$$(a,\ b)=(2k,\ 3k-1)$$

とかける。$0 \leqq a \leqq 6m,\quad 0 \leqq b \leqq 6m$ より，

$$0 \leqq 2k \leqq 6m,\quad 0 \leqq 3k-1 \leqq 6m$$

$$\therefore 0 \leqq k \leqq 3m,\quad \frac{1}{3} \leqq k \leqq 2m+\frac{1}{3}$$

であるから，これを満たす整数 k は $2m$ 個ある。②について，$3a-2b=-2 \Leftrightarrow 3a=2(b-1)$ より，2, 3 が互いに素であるから，整数 l を用いて

$$(a,\ b)=(2l,\ 3l+1)$$

とかける。$0 \leqq a \leqq 6m,\ 0 \leqq b \leqq 6m$ より，

$$0 \leqq 2l \leqq 6m,\quad 0 \leqq 3l+1 \leqq 6m$$

$$\therefore 0 \leqq l \leqq 3m,\quad -\frac{1}{3} \leqq l \leqq 2m-\frac{1}{3}$$

(2)　12点

$\frac{1}{2}|3a-2b|=1$‥2点

$(a,\ b)=(2k,\ 3k-1)$ ‥2点

条件を満たす整数 k は $2m$ 個‥2点

$(a,\ b)=(2l,\ 3l+1)$ ‥2点

であるから，これを満たす整数 l は $2m$ 個ある。①，②より，三角形 OPQ の面積が 1 となる $(a,\ b)$ の組の個数は

$$2m+2m=4m\ (\text{個})$$

となる。

(答) $4m$ 個

条件を満たす整数 l は $2m$ 個‥2 点

答‥2 点

(3)

(3)　24 点

N を $1 \leqq N \leqq 3m$ を満たす自然数とする。三角形 OPQ の面積が N となるとき，

$$\frac{1}{2}|3a-2b|=N$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=2N & \cdots③ \\ 3a-2b=-2N & \cdots④ \end{cases}$$

$\frac{1}{2}|3a-2b|=N$ ‥2 点

となる。③について，$3a-2b=2N \Leftrightarrow 3a=2(b+N)$ より，整数 k' を用いて，

$$(a,\ b)=(2k',\ 3k'-N)$$

とかける。

$(a,\ b)=(2k',\ 3k'-N)$ ‥1 点

[1]　$N=3n\ (1 \leqq n \leqq m)$ のとき

$0 \leqq a \leqq 6m,\ \ 0 \leqq b \leqq 6m$ より，

$$0 \leqq 2k' \leqq 6m,\ \ 0 \leqq 3k'-3n \leqq 6m$$

$$\therefore 0 \leqq k' \leqq 3m,\ \ n \leqq k' \leqq 2m+n$$

であるから，これを満たす k' は $2m+1$ 個ある。

$N=3n$ のとき条件を満たす整数 k' は $2m+1$ 個‥2 点

[2]　$N=3n-1\ (1 \leqq n \leqq m)$ のとき

$0 \leqq a \leqq 6m,\ \ 0 \leqq b \leqq 6m$ より，

$$0 \leqq 2k' \leqq 6m,\ \ 0 \leqq 3k'-(3n-1) \leqq 6m$$

$$\therefore 0 \leqq k' \leqq 3m,\ \ n-\frac{1}{3} \leqq k' \leqq 2m+n-\frac{1}{3}$$

であるから，これを満たす整数 k' は $2m$ 個ある。

$N=3n-1$ のとき条件を満たす整数 k' は $2m$ 個‥2 点

[3]　$N=3n-2\ (1 \leqq n \leqq m)$ のとき

$0 \leqq a \leqq 6m,\ \ 0 \leqq b \leqq 6m$ より，

$$0 \leqq 2k' \leqq 6m,\ \ 0 \leqq 3k'-(3n-2) \leqq 6m$$

$$\therefore 0 \leqq k' \leqq 3m,\ \ n-\frac{2}{3} \leqq k' \leqq 2m+n-\frac{2}{3}$$

であるから，これを満たす整数 k' は $2m$ 個ある。

$N=3n-2$ のとき条件を満たす整数 k' は $2m$ 個‥2 点

以上, [1], [2], [3]より, ③を満たす$(a,\ b)$の組の個数は, $1 \leqq n \leqq m$で足し合わせると,

$$\sum_{n=1}^{m}\{(2m+1)+m+m\}=m(6m+1)\ (\text{個})$$

である。同様にして, ④を満たす$(a,\ b)$の組の個数を求める。

$3a-2b=-2N \Leftrightarrow 3a=2(b-N)$より, 整数$l'$を用いて,

$$(a,\ b)=(2l',\ 3l'+N)$$

とかける。

[4]　$N=3n\ (1 \leqq n \leqq m)$のとき

$0 \leqq a \leqq 6m,\quad 0 \leqq b \leqq 6m$より,

$$0 \leqq 2l' \leqq 6m,\quad 0 \leqq 3l'+3n \leqq 6m$$

$$\therefore 0 \leqq l' \leqq 3m,\quad -n \leqq l' \leqq 2m-n$$

であるから, これを満たす整数l'は$2m+1-n$個ある。

[5]　$N=3n-1\ (1 \leqq n \leqq m)$のとき

$0 \leqq a \leqq 6m,\quad 0 \leqq b \leqq 6m$より,

$$0 \leqq 2l' \leqq 6m,\quad 0 \leqq 3l'+(3n-1) \leqq 6m$$

$$\therefore 0 \leqq l' \leqq 3m,\quad -n+\frac{1}{3} \leqq l' \leqq 2m-n+\frac{1}{3}$$

であるから, これを満たす整数l'は$2m+1-n$個ある。

[6]　$N=3n-2\ (1 \leqq n \leqq m)$のとき

$0 \leqq a \leqq 6m,\quad 0 \leqq b \leqq 6m$より,

$$0 \leqq 2l' \leqq 6m,\quad 0 \leqq 3l'+(3n-2) \leqq 6m$$

$$\therefore 0 \leqq l' \leqq 3m,\quad -n+\frac{2}{3} \leqq l' \leqq 2m-n+\frac{2}{3}$$

であるから, これを満たす整数l'は$2m+1-n$個ある。

以上, [4], [5], [6]より, ④を満たす$(a,\ b)$の組の個数は

$$\sum_{n=1}^{m}3(2m+1-n)=3\left\{m(2m+1)-\frac{1}{2}m(m+1)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}m(3m+1)\ (\text{個})$$

である。③, ④より, 三角形OPQの面積が$3m$以下の整数となる$(a,\ b)$の組の個数は

$m(6m+1)$ ‥3点

$(a,\ b)=(2l',\ 3l'+N)$ ‥1点

$N=3n$のとき条件を満たす整数l'は$2m+1-n$個‥2点

$N=3n-1$のとき条件を満たす整数l'は$2m+1-n$個‥2点

$N=3n-2$のとき条件を満たす整数l'は$2m+1-n$個‥2点

$\frac{3}{2}m(3m+1)$ ‥3点

$$m(6m+1)+\frac{3}{2}m(3m+1)=\frac{1}{2}m(21m+5)\text{(個)}$$

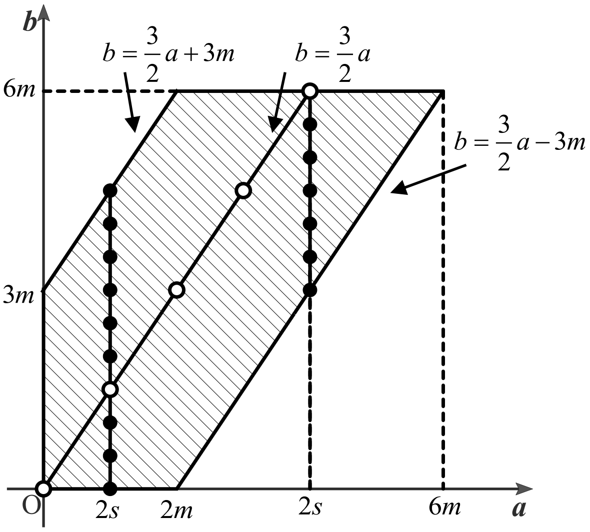
と求まる。

(答) $\frac{1}{2}m(21m+5)$ 個

答‥2 点

(3)[別解 1] (b 軸に平行な直線上の格子点から $b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を除いて求める方法)

(3)[別解 1] 24 点



三角形 OPQ の面積が $3m$ 以下より,

$$0<\frac{1}{2}|3a-2b|\leqq 3m$$

$$\therefore \frac{3}{2}a-3m\leqq b<\frac{3}{2}a,\ \frac{3}{2}a<b\leqq \frac{3}{2}a+3m$$

となる。そのため,ab 平面上において

$$0\leqq a\leqq 6m,\ \ 0\leqq b\leqq 6m,\ \frac{3}{2}a-3m\leqq b\leqq \frac{3}{2}a+3m$$

上にある格子点から,$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を除けばよい。ただし,(1)の結果より a は偶数のみである。ここで,s を $0\leqq s\leqq 3m$ を満たす整数とし,直線 $a=2s$ 上の格子点の個数を数えるために,$0\leqq s\leqq m$,$m+1\leqq s\leqq 2m$,$2m+1\leqq s\leqq 3m$ で場合分けをする。

[1] $0\leqq s\leqq m$ のとき

$0<\frac{1}{2}|3a-2b|\leqq 3m$ ‥2 点

$0\leqq a\leqq 6m,\ 0\leqq b\leqq 6m,\ \frac{3}{2}a-3m\leqq b\leqq \frac{3}{2}a+3m$ 上にある格子点から,$b=\frac{3}{2}a$ 上にあ

$$\frac{3}{2}a-3m \leqq b \leqq \frac{3}{2}a+3m$$

$$\Leftrightarrow 3s-3m \leqq b \leqq 3s+3m$$

について，$3s-3m \leqq 0$，$3s+3m \leqq 6m$である。したがって，

$$0 \leqq b \leqq \frac{3}{2}a+3m$$

$$\therefore 0 \leqq b \leqq 3s+3m$$

である。$(a, b)=(2s, 3s)$を満たす(a, b)の組が1組存在するため，$a=2s$上の格子点の個数は$3s+3m$個となる。$0 \leqq s \leqq m$で足し合わせると

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{m}(3s+3m) &= 3\cdot\frac{1}{2}m(m+1)+3m(m+1)\\ &= \frac{9}{2}m^2+\frac{9}{2}m\end{aligned}$$

となる。

[2]　$m+1 \leqq s \leqq 2m$のとき

$$\frac{3}{2}a-3m \leqq b \leqq \frac{3}{2}a+3m$$

$$\Leftrightarrow 3s-3m \leqq b \leqq 3s+3m$$

について，$3 \leqq 3s-3m \leqq 3m$，$6m+3 \leqq 3s+3m$である。したがって，

$$\frac{3}{2}a-3m \leqq b \leqq 6m$$

$$\therefore 3s-3m \leqq b \leqq 6m$$

である。$(a, b)=(2s, 3s)$を満たす(a, b)の組が1組存在するため，$a=2s$上の格子点の個数は$6m-(3s-3m)=9m-3s$個となる。$m+1 \leqq s \leqq 2m$で足し合わせると

$$\sum_{s=m+1}^{2m}(9m-3s)=\sum_{t=1}^{m}(6m-3t)\quad (s-m=t\text{ とする})$$

$$\begin{aligned}&= m\cdot 6m-3\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\\ &= \frac{9}{2}m^2-\frac{3}{2}m\end{aligned}$$

となる。

[3]　$2m+1 \leqq s \leqq 3m$のとき

る格子点を除く方針‥2点

$0 \leqq s \leqq m$のとき，$a=2s$上の格子点の個数は$3s+3m$個‥3点

$\frac{9}{2}m^2+\frac{9}{2}m$ **‥3点**

$m+1 \leqq s \leqq 2m$のとき，$a=2s$上の格子点の個数は$9m-3s$個‥3点

$\frac{9}{2}m^2-\frac{3}{2}m$ **‥3点**

$$\frac{3}{2}a-3m \leqq b \leqq \frac{3}{2}a+3m$$

$$\Leftrightarrow 3s-3m \leqq b \leqq 3s+3m$$

について，$3m+3 \leqq 3s-3m \leqq 6m$，$9m+3 \leqq 3s+3m$ である。したがって，

$$\frac{3}{2}a-3m \leqq b \leqq 6m$$

$$\therefore 3s-3m \leqq b \leqq 6m$$

である。$(a,\ b)=(2s,\ 3s)$ を満たす $(a,\ b)$ の組が存在しないため，$a=2s$ 上の格子点の個数は $6m-(3s-3m)+1=9m-3s+1$ 個となる。$2m+1 \leqq s \leqq 3m$ で足し合わせると

$$\sum_{s=2m+1}^{3m}(9m-3s+1)=\sum_{t=1}^{m}(3m+1-3t) \quad (s-2m=t \text{ とする})$$

$$=m(3m+1)-3\cdot\frac{1}{2}\cdot m(m+1)$$

$$=\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{2}m$$

となる。

以上, [1], [2], [3]より，三角形 OPQ の面積が $3m$ 以下の整数となる $(a,\ b)$ の組の個数は

$$\left(\frac{9}{2}m^2+\frac{9}{2}m\right)+\left(\frac{9}{2}m^2-\frac{3}{2}m\right)+\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{2}m\right)$$

$$=\frac{1}{2}m(21m+5)\ \text{(個)}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{2}m(21m+5)$ 個

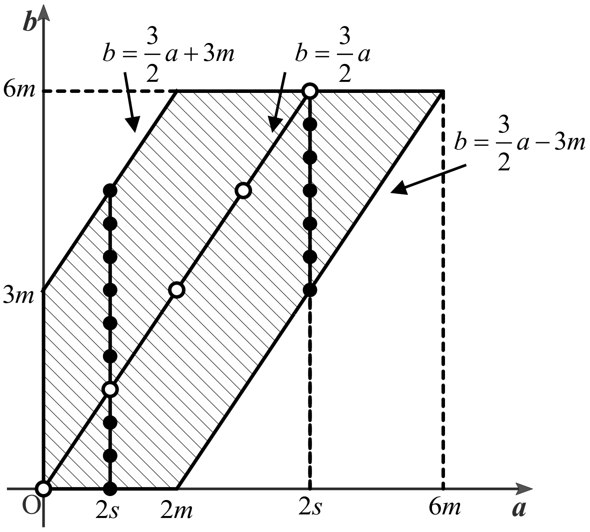
(3)[別解 2] （b 軸に平行な直線上の格子点の個数を，$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を含めて求めた後に，$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を一気に除く方法）

$2m+1 \leqq s \leqq 3m$ のとき，$a=2s$ 上の格子点の個数は $9m-3s+1$ 個・・3 点

$\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{2}m$・・3 点

答・・2 点

(3) ［別解 2］　24 点



三角形 OPQ の面積が $3m$ 以下より，

$$0<\frac{1}{2}|3a-2b|\leqq 3m$$

$$\therefore \frac{3}{2}a-3m\leqq b<\frac{3}{2}a,\ \frac{3}{2}a<b\leqq\frac{3}{2}a+3m$$

となる。そのため，ab 平面上において

$$0\leqq a\leqq 6m,\ \ 0\leqq b\leqq 6m,\ \frac{3}{2}a-3m\leqq b\leqq\frac{3}{2}a+3m$$

上にある格子点から，$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を除けばよい。ただし，a は偶数のみである。そこでまず，$0\leqq a\leqq 6m,\ \ 0\leqq b\leqq 6m,\ \frac{3}{2}a-3m\leqq b\leqq\frac{3}{2}a+3m$ 上にある格子点の個数を求める。ここで，s を $0\leqq s\leqq 3m$ を満たす整数とし，$a=2s$ とおく。直線 $a=2s$ 上の格子点の個数を数えるために，$0\leqq s\leqq m$，$m+1\leqq s\leqq 3m$ で場合分けをする。

[1]　$0\leqq s\leqq m$ のとき

$$\frac{3}{2}a-3m\leqq b\leqq\frac{3}{2}a+3m$$

$$\Leftrightarrow 3s-3m\leqq b\leqq 3s+3m$$

について，$3s-3m\leqq 0$，$3s+3m\leqq 6m$ である。したがって，

$$0\leqq b\leqq\frac{3}{2}a+3m$$

$0<\frac{1}{2}|3a-2b|\leqq 3m$ ･･2 点

$0\leqq a\leqq 6m,\ \ 0\leqq b\leqq 6m,\ \frac{3}{2}a-3m\leqq b\leqq\frac{3}{2}a+3m$ **上にある格子点から，$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を除く方針**･･2 点

$\therefore 0 \leqq b \leqq 3s+3m$

であるから，$a=2s$ 上の格子点の個数は $3s+3m+1$ 個となる。$0 \leqq s \leqq m$ で足し合わせると

$$\sum_{s=0}^{m}(3s+3m+1)=3\cdot\frac{1}{2}m(m+1)+(m+1)(3m+1)$$
$$=\frac{9}{2}m^2+\frac{11}{2}m+1$$

となる。

[2]　$m+1 \leqq s \leqq 3m$ のとき

$$\frac{3}{2}a-3m \leqq b \leqq \frac{3}{2}a+3m$$

$$\Leftrightarrow 3s-3m \leqq b \leqq 3s+3m$$

について，$3 \leqq 3s-3m \leqq 3m$，$6m+3 \leqq 3s+3m$ である。したがって，

$$\frac{3}{2}a-3m \leqq b \leqq 6m$$

$$\therefore 3s-3m \leqq b \leqq 6m$$

である。よって，$a=2s$ 上の格子点の個数は $6m-(3s-3m)+1=9m-3s+1$ 個となる。$m+1 \leqq s \leqq 3m$ で足し合わせると，

$$\sum_{s=m+1}^{3m}(9m-3s+1)=\sum_{t=1}^{2m}(6m+1-3t)\text{（}s-m=t\text{ とする）}$$

$$=2m(6m+1)-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2m(2m+1)$$
$$=6m^2-m$$

となる。

以上, [1], [2]より，$0 \leqq a \leqq 6m,\ 0 \leqq b \leqq 6m,\ \frac{3}{2}a-3m \leqq b \leqq \frac{3}{2}a+3m$ 上にある格子点の個数は

$$\left(\frac{9}{2}m^2+\frac{11}{2}m+1\right)+(6m^2-m)=\frac{1}{2}m(21m+9)+1\ \text{(個)}$$

となる。ここから，$0 \leqq a \leqq 6m,\ 0 \leqq b \leqq 6m$，$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子

$0 \leqq s \leqq m$ のとき，$a=2s$ 上の格子点の個数は $3s+3m+1$ 個

・・4 点

$\frac{9}{2}m^2+\frac{11}{2}m+1$

・・4 点

$m+1 \leqq s \leqq 3m$ のとき，$a=2s$ 上の格子点の個数は

$9m-3s+1$ **個・・4 点**

$6m^2-m$ **・・4 点**

点 $2m+1$ 個を除いて，

$$\frac{1}{2}m(21m+9)+1-(2m+1)=\frac{1}{2}m(21m+5)\ \text{(個)}$$

と求まる。

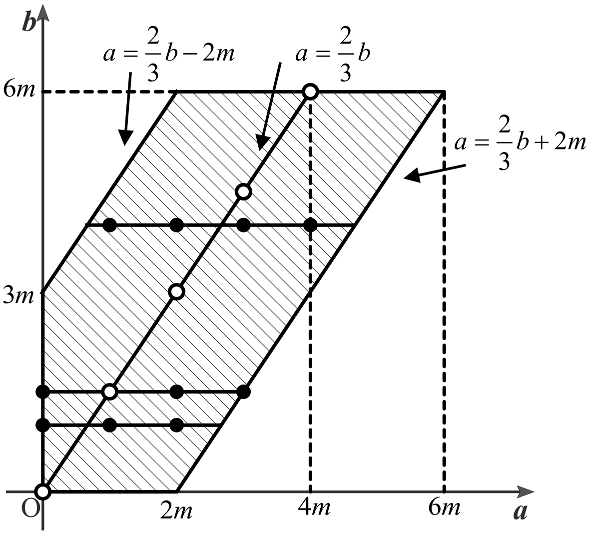
(答) $\frac{1}{2}m(21m+5)$ 個

$b=\frac{3}{2}a$ **上にある格子点** $2m+1$ **個を除いて‥2 点**

答‥2 点

(3)［別解 3］ 24 点

(3)[別解 3] （a 軸に平行な直線上の格子点から $b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を除いて求める方法）



三角形 OPQ の面積が $3m$ 以下より，

$$0<\frac{1}{2}|3a-2b|\leqq 3m$$

$$\therefore \frac{2}{3}b-2m\leqq a<\frac{2}{3}b,\ \frac{2}{3}b<a\leqq\frac{2}{3}a+2m$$

となる。そのため，ab 平面上において，

$$0\leqq a\leqq 6m,\ \ 0\leqq b\leqq 6m,\ \ \frac{2}{3}b-2m\leqq a\leqq\frac{2}{3}b+2m$$

上にある格子点から，$a=\frac{2}{3}b$ 上にある格子点を除けばよい。ただし，a は偶数のみである。b 軸に平行な直線上の格子点の個数を数えるために，$b=0$，$1\leqq b\leqq 3m$，$3m+1\leqq b\leqq 6m$ で場合分けをする。

[1]　$b=0$ のとき

$0<\frac{1}{2}|3a-2b|\leqq 3m$ **‥2 点**

$0\leqq a\leqq 6m,\ 0\leqq b\leqq 6m$**，**

$\frac{2}{3}b-2m\leqq a\leqq\frac{2}{3}b+2m$ **上にある格子点から，**

このとき,

$$\frac{2}{3}\cdot 0-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot 0+2m$$

$\therefore 0 \leqq a \leqq 2m$ （$\because 0 \leqq a \leqq 6m$）

である。$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$であるため，a は偶数より格子点の個数は m 個である。

[2] $1 \leqq b \leqq 3m$ のとき

このとき,

$$\frac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$$

について，$\frac{2}{3}b-2m \leqq 0$，$\frac{2}{3}b+2m \leqq 4m$である。したがって,

$$0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$$

上の格子点の個数を求めればよい。ここで，t を $1 \leqq t \leqq m$ を満たす整数とする。

[i] $b=3t$ のとき

$$0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot 3t+2m$$

$\therefore 0 \leqq a \leqq 2t+2m$

である。$(a,\ b)=(2t,\ 3t)$ を満たす $(a,\ b)$ の組が1組存在するため，a は偶数より格子点の個数は $t+m$ 個である。

[ii] $b=3t-1$ のとき

$$0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot(3t-1)+2m$$

$$\therefore 0 \leqq a \leqq 2t+2m-\frac{2}{3}$$

であるから，a は偶数より格子点の個数は $t+m$ 個である。

[iii] $b=3t-2$ のとき

$$0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot(3t-2)+2m$$

$$\therefore 0 \leqq a \leqq 2t+2m-\frac{4}{3}$$

$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を除く方針‥2点

$1 \leqq b \leqq 3m$ のとき，$b=3t$ 上の格子点の個数は $t+m$ 個‥2点

$1 \leqq b \leqq 3m$ のとき，$b=3t-1$ 上の格子点の個数は $t+m$ 個‥2点

$1 \leqq b \leqq 3m$ のとき，$b=3t-2$ 上の格子子

であるから，a は偶数より格子点の個数は $t+m$ 個である。

以上, [i], [ii], [iii]より，$1 \leqq b \leqq 3m$ で足し合わせると，

$$\sum_{t=1}^{m}(3t+3m)=3\cdot\frac{1}{2}m(m+1)+m\cdot 3m$$
$$=\frac{9}{2}m^2+\frac{3}{2}m$$

となる。

点の個数は $t+m$ 個‥2 点

$\frac{9}{2}m^2+\frac{3}{2}m$ ‥3 点

[3]　$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ のとき

$$\frac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$$

について，$\frac{2}{3}b-2m \geqq 0$ である。さらに，$\frac{2}{3}b+2m \leqq 6m$ である。

したがって，

$$\frac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$$

上の格子点の個数を求めればよい。ここで，t を $m+1 \leqq t \leqq 2m$ を満たす整数とする。

[iv]　$b=3t$ のとき

$$\frac{2}{3}\cdot 3t-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot 3t+2m$$

$$\therefore 2t-2m \leqq a \leqq 2t+2m$$

である。$(a,\ b)=(2t,\ 3t)$ を満たす $(a,\ b)$ の組が1組存在するため，a は偶数より格子点の個数は $2m$ 個である。

$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ のとき，$b=3t$ 上の格子点の個数は $2m$ 個‥2 点

[v]　$b=3t-1$ のとき

$$\frac{2}{3}\cdot(3t-1)-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot(3t-1)+2m$$

$$\therefore 2t-2m-\frac{2}{3} \leqq a \leqq 2t+2m-\frac{2}{3}$$

であるから，a は偶数より格子点の個数は $2m$ 個である。

$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ のとき，$b=3t-1$ 上の格子点の個数は $2m$ 個‥2 点

[vi]　$b=3t-2$ のとき

$$\frac{2}{3}\cdot(3t-2)-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot(3t-2)+2m$$

$$\therefore 2t-2m-\frac{4}{3} \leqq a \leqq 2t+2m-\frac{4}{3}$$

$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ のとき，$b=3t-2$ 上の格子点の個数は

であるから，a は偶数より格子点の個数は $2m$ 個である。

以上, [iv], [v], [vi]より，$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ で足し合わせると，

$$\sum_{t=m+1}^{2m}(2m+2m+2m)=6m^2$$

となる。

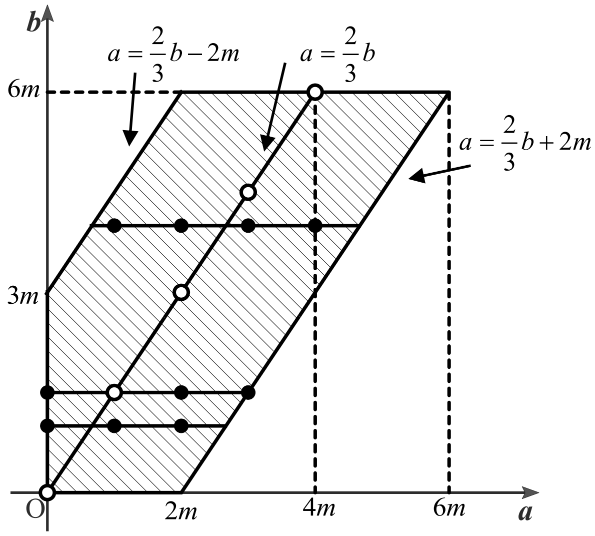
以上, [1], [2], [3]より，三角形 OPQ の面積が $3m$ 以下の整数となる (a, b) の組の個数は

$$m+\left(\frac{9}{2}m^2+\frac{3}{2}m\right)+6m^2=\frac{1}{2}m(21m+5)(\text{個})$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{2}m(21m+5)$ 個

(3)[別解 4]　（a 軸に平行な直線上の格子点の個数を，$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を含めて求めた後に，$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点の個数を一気に除く方法）



三角形 OPQ の面積が $3m$ 以下より，

$$0<\frac{1}{2}|3a-2b| \leqq 3m$$

$$\therefore \frac{2}{3}b-2m \leqq a<\frac{2}{3}b,\ \frac{2}{3}b<a \leqq \frac{2}{3}a+2m$$

となる。そのため，ab 平面上において，

$2m$ 個‥2 点

$6m^2$ ‥3 点

答‥2 点

(3) [別解 4]　24 点

$0<\frac{1}{2}|3a-2b| \leqq 3m$

‥2 点

$0 \leqq a \leqq 6m$,　0

$$0 \leqq a \leqq 6m,\ 0 \leqq b \leqq 6m,\ \frac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$$

上にある格子点から，$a=\frac{2}{3}b$ 上にある格子点を除けばよい。ただし，a は偶数のみである。そこでまず，$0 \leqq a \leqq 6m,\ 0 \leqq b \leqq 6m$，$\frac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$ 上にある格子点の個数を求める。b 軸に平行な直線上の格子点の個数を数えるために，$b=0$，$1 \leqq b \leqq 3m$，$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ で場合分けをする。

[1] $b=0$ のとき

$$\frac{2}{3}\cdot 0-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot 0+2m$$

$$\therefore 0 \leqq a \leqq 2m\ （\because 0 \leqq a \leqq 6m）$$

であるから，a は偶数より格子点の個数は $m+1$ 個である。

[2] $1 \leqq b \leqq 3m$ のとき

このとき，

$$\frac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$$

について，$\frac{2}{3}b-2m \leqq 0$，$\frac{2}{3}b+2m \leqq 4m$ である。したがって，

$$0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$$

上の格子点の個数を求めればよい。ここで，t を $1 \leqq t \leqq m$ を満たす整数とする。

[i] $b=3t$ のとき

$$0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot 3t+2m$$

$$\therefore 0 \leqq a \leqq 2t+2m$$

であるから，a は偶数より格子点の個数は $t+m+1$ 個である。

[ii] $b=3t-1$ のとき

$$0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot(3t-1)+2m$$

$\leqq b \leqq 6m$，$\frac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$ **上にある格子点から，$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点を除く方針‥2 点**

$1 \leqq b \leqq 3m$ のとき，$b=3t$ 上の格子点の個数は $t+m+1$ 個‥2 点

$1 \leqq b \leqq 3m$ のとき，

$$\therefore 0 \leqq a \leqq 2t+2m-\frac{2}{3}$$

であるから，a は偶数より格子点の個数は $t+m$ 個である。

[iii]　$b=3t-2$ のとき

$$0 \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot(3t-2)+2m$$

$$\therefore 0 \leqq a \leqq 2t+2m-\frac{4}{3}$$

であるから，a は偶数より格子点の個数は $t+m$ 個である。

以上, [i], [ii], [iii]より，$1 \leqq b \leqq 3m$ で足し合わせると,

$$\sum_{t=1}^{m}(3t+3m+1)=3\cdot\frac{1}{2}m(m+1)+m(3m+1)$$
$$=\frac{9}{2}m^2+\frac{5}{2}m$$

となる。

[3]　$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ のとき

$$\frac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$$

について，$\frac{2}{3}b-2m \geqq 0$ である。さらに，$\frac{2}{3}b+2m \leqq 6m$ である。

したがって,

$$\frac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}b+2m$$

上の格子点の個数を求めればよい。ここで，t を $m+1 \leqq t \leqq 2m$ を満たす整数とする。

[iv]　$b=3t$ のとき

$$\frac{2}{3}\cdot 3t-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot 3t+2m$$

$$\therefore 2t-2m \leqq a \leqq 2t+2m$$

であるから，a は偶数より格子点の個数は $2m+1$ 個である。

[v]　$b=3t-1$ のとき

$$\frac{2}{3}\cdot(3t-1)-2m \leqq a \leqq \frac{2}{3}\cdot(3t-1)+2m$$

$b=3t-1$ 上の格子点の個数は $t+m$ 個‥2 点

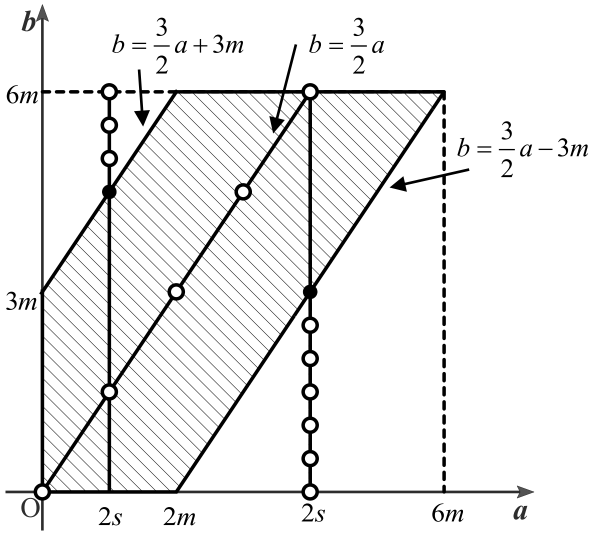
$1 \leqq b \leqq 3m$ のとき，$b=3t-2$ 上の格子点の個数は $t+m$ 個‥2 点

$\frac{9}{2}m^2+\frac{5}{2}m$ ‥2 点

$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ のとき，$b=3t$ 上の格子点の個数は $2m+1$ 個‥2 点

$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ のとき，$b=3t-1$ 上の

$\therefore 2t-2m-\dfrac{2}{3} \leqq a \leqq 2t+2m-\dfrac{2}{3}$ であるから，a は偶数より格子点の個数は $2m$ 個である。	**格子点の個数は** $2m$ **個‥2 点**
[vi]　$b=3t-2$ のとき $\dfrac{2}{3}\cdot(3t-2)-2m \leqq a \leqq \dfrac{2}{3}\cdot(3t-2)+2m$ $\therefore 2t-2m-\dfrac{4}{3} \leqq a \leqq 2t+2m-\dfrac{4}{3}$ であるから，a は偶数より格子点の個数は $2m$ 個である。	$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ **のとき，** $b=3t-2$ **上の格子点の個数は** $2m$ **個‥2 点**
以上, [iv], [v], [vi]より，$3m+1 \leqq b \leqq 6m$ で足し合わせると, $\displaystyle\sum_{t=m+1}^{2m}\{(2m+1)+2m+2m\}=m(6m+1)$ となる。	$m(6m+1)$ **‥2 点**
以上, [1], [2], [3]より，$0 \leqq a \leqq 6m,\ \ 0 \leqq b \leqq 6m$，$\dfrac{2}{3}b-2m \leqq a \leqq \dfrac{2}{3}b+2m$ 上にある格子点の個数は $(m+1)+\left(\dfrac{9}{2}m^2+\dfrac{5}{2}m\right)+m(6m+1)=\dfrac{21}{2}m^2+\dfrac{9}{2}m+1$　(個)	
となる。ここから，$0 \leqq a \leqq 6m,\ \ 0 \leqq b \leqq 6m$，$b=\dfrac{3}{2}a$ 上にある格子点 $2m+1$ 個を除いて, $\dfrac{21}{2}m^2+\dfrac{9}{2}m+1-(2m+1)=\dfrac{1}{2}m(21m+5)$　(個)	$b=\dfrac{3}{2}a$ **上にある格子点** $2m+1$ **個を除いて‥2 点**
と求まる。 (答)　$\dfrac{1}{2}m(21m+5)$ 個	**答‥2 点**
(3)[別解 5]（$0 \leqq a \leqq 6m,\ \ 0 \leqq b \leqq 6m$ かつ a が偶数となる格子点の個数を求めた後に，2 つの三角形の領域に含まれる格子点と，$b=\dfrac{3}{2}a$ 上にある格子点を一気に除く方法）	**(3) [別解 5]　24 点**



三角形OPQの面積が$3m$以下より，

$$0<\frac{1}{2}|3a-2b| \leqq 3m$$

$$\therefore \frac{3}{2}a-3m \leqq b<\frac{3}{2}a,\ \frac{3}{2}a<b \leqq \frac{3}{2}a+3m$$

となる。そのため，ab平面上において

$$0 \leqq a \leqq 6m,\ \ 0 \leqq b \leqq 6m$$

上にある格子点から，

$$0 \leqq a \leqq 6m,\ \ \frac{3}{2}a+3m<b \leqq 6m,\ \ 0 \leqq b<\frac{3}{2}a-3m,$$

$$b=\frac{3}{2}a$$

上にある格子点を除けばよい。ただし，aは偶数のみである。ここで，sを$0 \leqq s \leqq 3m$を満たす整数とし，$a=2s$とおく。まず，$0 \leqq a \leqq 6m$, $0 \leqq b \leqq 6m$上にある格子点の個数を求める。

$$0 \leqq s \leqq 3m,\ \ 0 \leqq b \leqq 6m$$

であるから，$(3m+1)(6m+1)$個ある。次に，$\frac{3}{2}a+3m<b \leqq 6m$，$0 \leqq b<\frac{3}{2}a-3m$，$b \neq \frac{3}{2}a$かつ$a$が偶数となる格子点の個数を数える。直線$a=2s$上の格子点の個数を数えるために，$0 \leqq s \leqq m$，$m+1 \leqq s \leqq 3m$で場合分けをする。

[1]　$0 \leqq s \leqq m$のとき

$0<\frac{1}{2}|3a-2b| \leqq 3m$

‥2点

$0 \leqq a \leqq 6m$, $0 \leqq b \leqq 6m$上にある格子点から，$0 \leqq a \leqq 6m$, $\frac{3}{2}a+3m<b \leqq 6m$，$0 \leqq b<\frac{3}{2}a-3m$，$b=\frac{3}{2}a$上にある格子点を除く方針‥2点

$0 \leqq a \leqq 6m$, $0 \leqq b \leqq 6m$上にある格子点は$(3m+1)(6m+1)$個‥4点

$$\frac{3}{2}a+3m<b\leqq 6m$$

$$\therefore 3s+3m<b\leqq 6m$$

であるから，$a=2s$ 上の格子点の個数は

$6m-(3s+3m)=3m-3s$ 個となる。$0\leqq s\leqq m$ で足し合わせると

$$\sum_{s=0}^{m}(3m-3s)=3m(m+1)-3\cdot\frac{1}{2}m(m+1)$$
$$=\frac{3}{2}m^2+\frac{3}{2}m$$

となる。

[2] $m+1\leqq s\leqq 3m$ のとき

$$0\leqq b<\frac{3}{2}a-3m$$

$$\therefore 0\leqq b<3s-3m$$

であるから，$a=2s$ 上の格子点の個数は $3s-3m$ 個となる。$m+1\leqq s\leqq 3m$ で足し合わせると

$$\sum_{s=m+1}^{3m}(3s-3m)=\sum_{t=1}^{2m}3t \quad (s-m=t\text{ とする})$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 2m(2m+1)$$
$$=6m^2+3m$$

となる。

以上, [1], [2]より，$0\leqq a\leqq 6m,\ 0\leqq b\leqq 6m,\ \frac{3}{2}a-3m\leqq b\leqq \frac{3}{2}a+3m$ 上にある格子点の個数は

$$(3m+1)(6m+1)-\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{3}{2}m\right)-\left(6m^2+3m\right)$$

$$=\frac{1}{2}m(21m+9)+1\ \text{(個)}$$

となる。ここから，$0\leqq a\leqq 6m,\ 0\leqq b\leqq 6m$，$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点 $2m+1$ 個を除いて，

$0\leqq s\leqq m$ のとき，$a=2s$ 上の格子点の個数は $3m-3s$ 個‥2 点

$\frac{3}{2}m^2+\frac{3}{2}m$ ‥4 点

$m+1\leqq s\leqq 3m$ のとき，$a=2s$ 上の格子点の個数は $3s-3m$ 個‥2 点

$6m^2+3m$ ‥4 点

$b=\frac{3}{2}a$ 上にある格子点 $2m+1$ 個を除い

$$\frac{1}{2}m(21m+9)+1-(2m+1)=\frac{1}{2}m(21m+5)\ \ (個)$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{2}m(21m+5)$ 個

て・・2 点

答・・2 点