

広島大本番レベル模試（文系）

解答・解説・採点基準

全4問 120分 200点満点

[1] (50点)

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り、結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

問題文より

$$|\vec{AB}| = 7$$

$$\Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow 36 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 25 = 49$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \text{ (A)}$$

である。また、これを用いて

$$\Delta OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$= 6\sqrt{6} \text{ (B)}$$

とわかる。

$$\text{(答)} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 6, \Delta OAB = 6\sqrt{6}$$

(1) 10点 (A)(B)

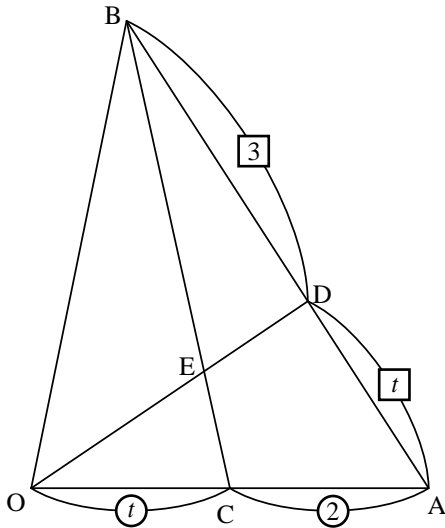
(A) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めて・・・5点

(B) ΔOAB の面積を求めて・・・5点

(2)

問題文の状況を図示すると下図のようになる。

(2) 16点 (A)(B)(C)(D)(E)



上図より

$$\vec{OD} = \frac{3}{t+3}\vec{a} + \frac{t}{t+3}\vec{b} \quad (\text{A})$$

である。点Eは端点を除く線分OD上の点であるから、 $0 < k < 1$ を満たす実数 k を用いて

$$\begin{aligned} \vec{OE} &= k\vec{OD} \\ &= \frac{3k}{t+3}\vec{a} + \frac{kt}{t+3}\vec{b} \quad (\text{B}) \end{aligned}$$

と表される。また、点Eは端点を除く線分BC上の点であるから、 $0 < l < 1$ を満たす実数 l を用いて $BE:EC = l:(1-l)$ とすると

$$\begin{aligned} \vec{OE} &= (1-l)\vec{OB} + l\vec{OC} \\ &= \frac{lt}{t+2}\vec{a} + (1-l)\vec{b} \quad (\text{C}) \quad \left(\because \vec{OC} = \frac{t}{t+2}\vec{a} \right) \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ で、かつ \vec{a}, \vec{b} は平行でないから

$$\begin{cases} \frac{3k}{t+3} = \frac{lt}{t+2} \\ \frac{kt}{t+3} = 1-l \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{t(t+3)}{t^2+3t+6}, l = \frac{3(t+2)}{t^2+3t+6} \quad (\text{D})$$

である。したがって

$$\vec{OE} = \frac{3t}{t^2+3t+6}\vec{a} + \frac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b} \quad (\text{E})$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{OD} = \frac{3}{t+3}\vec{a} + \frac{t}{t+3}\vec{b}, \vec{OE} = \frac{3t}{t^2+3t+6}\vec{a} + \frac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b}$$

(A) \vec{OD} を t, \vec{a}, \vec{b} を用いて表して…3点

(B) 点EがOD上にあることを \vec{OE} の式で表して…3点

(C) 点EがBC上にあることを \vec{OE} の式で表して…3点

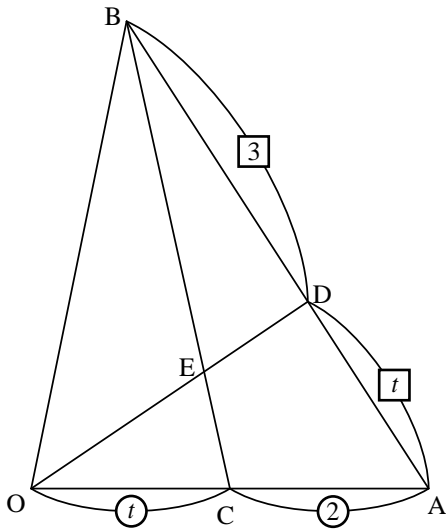
(D) k, l を t を用いて表して…3点

・ k と l の一方のみでも可

(E) \vec{OE} を t, \vec{a}, \vec{b} を用いて表して…4点

(2)[別解]

問題文の状況を図示すると下図のようになる。



上図より

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3}{t+3}\vec{a} + \frac{t}{t+3}\vec{b} \quad (\text{A})$$

である。ここで、 $\triangle ABC$ と直線ODについて、メネラウスの定理により

$$\frac{AO}{OC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1 \quad (\text{F})$$

$$\Leftrightarrow \frac{t+2}{t} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{3}{t} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{CE}{EB} = \frac{t^2}{3t+6}$$

$$\therefore CE:EB = t^2:(3t+6) \quad (\text{D1})$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \frac{t^2\overrightarrow{OB} + (3t+6)\overrightarrow{OC}}{t^2 + (3t+6)} \\ &= \frac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b} + \frac{3(t+2)}{t^2+3t+6} \cdot \frac{t}{t+2}\vec{a} \end{aligned}$$

$$= \frac{3t}{t^2+3t+6}\vec{a} + \frac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b} \quad (\text{E})$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OD} = \frac{3}{t+3}\vec{a} + \frac{t}{t+3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OE} = \frac{3t}{t^2+3t+6}\vec{a} + \frac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b}$$

(2)[別解] 16点 (A)(F)(D1)(E)

(A) \overrightarrow{OD} を t, \vec{a}, \vec{b} を用いて表して…3点

(F) メネラウスの定理を正しく用いて…6点

(D1) $CE:EB$ を t を用いて表して…3点

(E) \overrightarrow{OE} を t, \vec{a}, \vec{b} を用いて表して…4点

(3)

(1)の結果と(2)の過程より

$$\begin{aligned}\Delta OBE &= \frac{OE}{OD} \cdot \Delta OBD \\ &= k \cdot \Delta OBD \\ &= \frac{t(t+3)}{t^2+3t+6} \cdot \frac{3}{t+3} \cdot 6\sqrt{6} \\ &= \frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \Delta OBE = \frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6} \quad (A)$$

(3) 8点 (A)

(A)答・8点

(3)[別解]

(1)の結果と(2)の過程より

$$\begin{aligned}\Delta OBE &= \frac{BE}{BC} \cdot \Delta OBC \\ &= l \cdot \Delta OBC \\ &= \frac{3t+6}{t^2+3t+6} \cdot \frac{t}{t+2} \cdot 6\sqrt{6} \\ &= \frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \Delta OBE = \frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6} \quad (A)$$

(3)[別解] 8点 (A)

(A)答・8点

(4)

(3)の結果より

$$\begin{aligned}\Delta OBE &= \frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6} \\ &= \frac{18\sqrt{6}}{t+\frac{6}{t}+3} \quad (A) \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

である。ここで、 $t > 0, \frac{6}{t} > 0$ (B 1/2)であるから、相加平均と相乗平均の大小関係より

$$t + \frac{6}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{6}{t}} = 2\sqrt{6} \quad (B 2/2)$$

(4) 16点 (A)(B)(C)(D)

(A) ΔOBE の面積の式を変形して
・4点

(B) 相加平均と相乗平均の大小関係を正しく用いて・4点

・ ΔOBE の面積の式で直接用いても可

・ $t > 0, \frac{6}{t} > 0$ の確認がない場合は 0点

であり、等号成立は

$$t = \frac{6}{t}$$
$$\therefore t = \sqrt{6} (\because t > 0)$$

のときである。よって

$$\begin{aligned} \Delta OBE &= \frac{18\sqrt{6}}{t + \frac{6}{t} + 3} \\ &\leq \frac{18\sqrt{6}}{2\sqrt{6} + 3} \\ &= \frac{72 - 18\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

である。したがって、 ΔOBE の面積は、 $t = \sqrt{6}$ (C) のとき最大値

$$\frac{72 - 18\sqrt{6}}{5} \text{ (D) をとる。}$$

$$\text{(答) } t = \sqrt{6} \text{ のとき最大値 } \frac{72 - 18\sqrt{6}}{5}$$

(C) ΔOBE が最大となる t の値を求めて

..4 点

(D) ΔOBE の面積の最大値を求めて

..4 点