広島大本番レベル模試（理系）

解答・解説・採点基準

全５問　１５０分　２００点満点

［Ｉ］　（４０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

問題文より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 7$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{a}\right|^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow 36 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 25 = 49$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 6\ \text{(A)}$$

である。また，これを用いて

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

$$= 6\sqrt{6}\ \text{(B)}$$

とわかる。

(答)　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6,\ \triangle\mathrm{OAB} = 6\sqrt{6}$

(1)　8点 (A)(B)

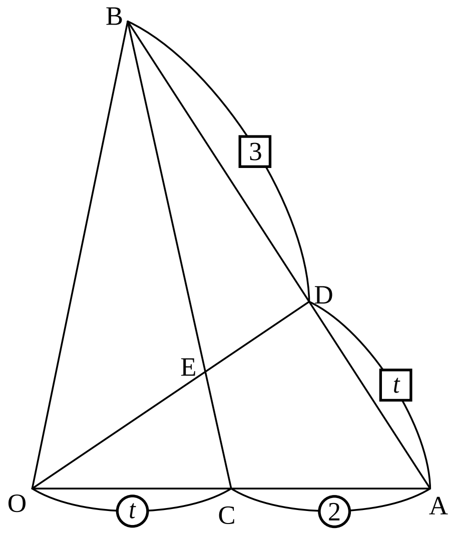
(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ **を求めて‥4点**

(B) $\triangle\mathrm{OAB}$ **の面積を求めて‥4点**

(2)

問題文の状況を図示すると下図のようになる。

(2)　13点 (A)(B)(C)(D)(E)



上図より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{t+3}\vec{a}+\frac{t}{t+3}\vec{b}\ \text{(A)}$$

である。点 E は端点を除く線分 OD 上の点であるから，$0<k<1$ を満たす実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\frac{3k}{t+3}\vec{a}+\frac{kt}{t+3}\vec{b}\ \text{(B)}\end{aligned}$$

と表される。また，点 E は端点を除く線分 BC 上の点であるから，$0<l<1$ を満たす実数 l を用いて $\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=l:(1-l)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+l\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{lt}{t+2}\vec{a}+(1-l)\vec{b}\ \text{(C)}\ \left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{t}{t+2}\vec{a}\right)\end{aligned}$$

と表される。ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{a}$, $\vec{b}$ は平行でないから

$$\begin{cases}\dfrac{3k}{t+3}=\dfrac{lt}{t+2}\\[2mm]\dfrac{kt}{t+3}=1-l\end{cases}$$

$$\therefore\ k=\frac{t(t+3)}{t^2+3t+6},\ l=\frac{3(t+2)}{t^2+3t+6}\ \text{(D)}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{3t}{t^2+3t+6}\vec{a}+\frac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b}\ \text{(E)}$$

である。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{3}{t+3}\vec{a}+\dfrac{t}{t+3}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{3t}{t^2+3t+6}\vec{a}+\dfrac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b}$

(A) **$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を t, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表して‥2 点**

(B) 点 E が OD 上にあることを $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ の式で表して‥2 点

(C) 点 E が BC 上にあることを $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ の式で表して‥2 点

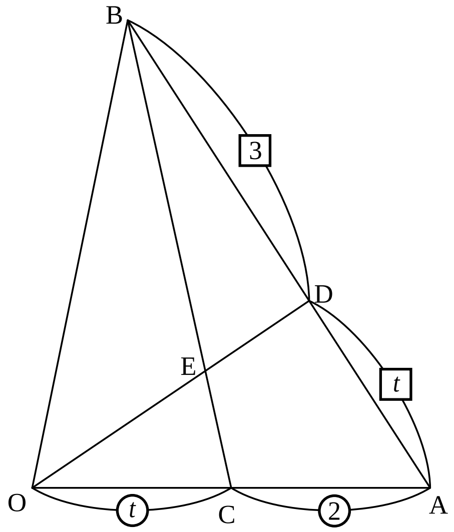
(D) k, l を t を用いて表して‥3 点

・k と l の一方のみでも可

(E) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を t, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表して‥4 点

(2)[別解]

問題文の状況を図示すると下図のようになる。



上図より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{t+3}\vec{a}+\frac{t}{t+3}\vec{b}\ \text{(A)}$$

である。ここで，△ABC と直線 OD について，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}=1\ \text{(F)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t+2}{t}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{3}{t}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}}=\frac{t^2}{3t+6}$$

$$\therefore\ \mathrm{CE}:\mathrm{EB}=t^2:(3t+6)\ \text{(D1)}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{t^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(3t+6)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{t^2+(3t+6)}$$

$$=\frac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b}+\frac{3(t+2)}{t^2+3t+6}\cdot\frac{t}{t+2}\vec{a}$$

$$=\frac{3t}{t^2+3t+6}\vec{a}+\frac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b}\ \text{(E)}$$

である。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{t+3}\vec{a}+\frac{t}{t+3}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{3t}{t^2+3t+6}\vec{a}+\frac{t^2}{t^2+3t+6}\vec{b}$

(2)[別解]　13 点 (A)(F)(D1)(E)

(A) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $t,\ \vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表して‥2 点

(F)メネラウスの定理を正しく用いて‥4 点

(D1) CE : EB を t を用いて表して‥3 点

(E) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $t,\ \vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表して‥4 点

(3)

(1)の結果と(2)の過程より

$$\triangle\mathrm{OBE}=\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OD}}\cdot\triangle\mathrm{OBD}$$
$$=k\cdot\triangle\mathrm{OBD}$$
$$=\frac{t(t+3)}{t^2+3t+6}\cdot\frac{3}{t+3}\cdot 6\sqrt{6}$$
$$=\frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6}$$

である。

(答) $\triangle\mathrm{OBE}=\frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6}$ (A)

(3) 6点 (A)

(A)答‥6点

(3)[別解]

(1)の結果と(2)の過程より

$$\triangle\mathrm{OBE}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}}\cdot\triangle\mathrm{OBC}$$
$$=l\cdot\triangle\mathrm{OBC}$$
$$=\frac{3t+6}{t^2+3t+6}\cdot\frac{t}{t+2}\cdot 6\sqrt{6}$$
$$=\frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6}$$

である。

(答) $\triangle\mathrm{OBE}=\frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6}$ (A)

(3)[別解] 6点 (A)

(A)答‥6点

(4)

(3)の結果より

$$\triangle\mathrm{OBE}=\frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6}$$

$$=\frac{18\sqrt{6}}{t+\frac{6}{t}+3}\ \text{(A)}\quad(\because t>0)$$

である。ここで，$t>0,\ \frac{6}{t}>0$ (B 1/2)であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$t+\frac{6}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{6}{t}}=2\sqrt{6}\ \text{(B 2/2)}$$

(4) 13点 (A)(B)(C)(D)

(A) △OBE の面積の式を変形して‥3点

(B)相加平均と相乗平均の大小関係を正しく用いて‥3点

- **△OBE の面積の式で直接用いても可**
- **$t>0,\ \frac{6}{t}>0$ の確認がない場合は 0点**

であり，等号成立は

$$t=\frac{6}{t}$$
$$\therefore t=\sqrt{6}\ (\because t>0)$$

のときである。よって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OBE}&=\frac{18\sqrt{6}}{t+\frac{6}{t}+3}\\&\leqq\frac{18\sqrt{6}}{2\sqrt{6}+3}\\&=\frac{72-18\sqrt{6}}{5}\end{aligned}$$

である。したがって，△OBE の面積は，$t=\sqrt{6}$ (C)のとき最大値 $\frac{72-18\sqrt{6}}{5}$ (D)をとる。

(答) $t=\sqrt{6}$ のとき最大値 $\frac{72-18\sqrt{6}}{5}$

(C) △OBE が最大となる t の値を求めて ‥3 点

(D) △OBE の面積の最大値を求めて ‥4 点

(4)[別解]

△OBE の面積を S とおくと, (3)の結果より，$S=\frac{18\sqrt{6}t}{t^2+3t+6}$ である。

このとき

$$\frac{dS}{dt}=18\sqrt{6}\cdot\frac{1\cdot(t^2+3t+6)-t\cdot(2t+3)}{(t^2+3t+6)^2}\ \text{(E)}$$
$$=18\sqrt{6}\cdot\frac{(\sqrt{6}+t)(\sqrt{6}-t)}{(t^2+3t+6)^2}$$

となるから，S の増減表(F)は下表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dt}$	／	$+$	0	$-$
S	／	↗	極大	↘

したがって，△OBE の面積は，$t=\sqrt{6}$ (C)のとき，最大値

(4)[別解] 13 点 (E)(F)(C)(D)

(E) $\frac{dS}{dt}$ を求めて‥3 点

・因数分解の有無は不問

(F) S の増減表をかいて‥3 点

(C) △OBE が最大となる t の値を求めて ‥3 点

$$\frac{108}{12+3\sqrt{6}} = \frac{72-18\sqrt{6}}{5} \text{(D)}$$

をとる。

(答) $t=\sqrt{6}$ のとき最大値 $\dfrac{72-18\sqrt{6}}{5}$

(D) △OBE **の面積の最大値を求めて**

・・4 点