広島大本番レベル模試（理系）

解答・解説・採点基準

全５問　１５０分　２００点満点

〔１〕　（４０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

点 G は△OAB の重心より

$$G\left(\frac{t+1}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\text{(A)}$$

となる。

(答) $G\left(\frac{t+1}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(1)　4 点（A）

(A)答‥4 点

(2)

△BCG において，$\angle BCG=\frac{\pi}{2}$ より円周角の定理から線分 BG は 3 点 B, C, G を通る円の直径である。また，△BDG に対しても，同様のことがいえるので，線分 BG は 4 点 B, C, D, G を通る円の直径である。(A)したがって，4 点 B, C, D, G を通る円の半径は

$$\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t-\frac{t+1}{3}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{t^2-t+1}\text{(B)}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}\sqrt{t^2-t+1}$

(2)　7 点（A)(B)

(A)線分 BG が直径‥4 点

(B)答‥3 点

(3)

$\overrightarrow{AB}=\left(t-1,\ -\sqrt{3}\right)$ より $\left(\sqrt{3},\ t-1\right)$ は直線 AB の法線ベクトルの 1 つである。よって，直線 AB の方程式は

$$\sqrt{3}(x-t)+(t-1)y=0$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{3}x+(t-1)y-\sqrt{3}t=0 \text{ (A)}$$

となる。点 G から直線 AB に下ろした垂線の足が点 D であるから，点 G と直線 AB において，点と直線の距離の公式を用いて，線分 DG の長さは

$$\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\frac{t+1}{3}+(t-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}t\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(t-1)^2}} \text{ (B)}$$

$$=\frac{t}{\sqrt{3\left(t^2-2t+4\right)}} \text{ (C)} \quad (\because t>0)$$

となる。

(答) $\mathrm{DG}=\dfrac{t}{\sqrt{3\left(t^2-2t+4\right)}}$

(3) 9 点 (A)(B)(C)

(A)直線 AB の方程式‥4 点

(B)点と直線の距離の公式の利用‥2 点

(C)答‥3 点

(3)[別解]

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。$\vec{a}=\left(1,\ \sqrt{3}\right),\ \vec{b}=(t,\ 0)$ より

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=t,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=t$ となる。点 G は△OAB の重心より

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

となる。また，点 D は直線 AB 上の点より実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b} \text{ (D)}$$

と表される。$\mathrm{AB}\perp\mathrm{DG}$ より

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=0 \text{ (E)}$$

(3)[別解] 9 点 (D)(E)(F)(C)

(D) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ で表して‥2 点

(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=0$‥2 点

$$\Leftrightarrow \left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left\{\left(s-\frac{2}{3}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-s\right)\vec{b}\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(s-\frac{2}{3}\right)\left|\vec{a}\right|^2+(2s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\frac{1}{3}-s\right)\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(s-\frac{2}{3}\right)\cdot 2^2+(2s-1)\cdot t+\left(\frac{1}{3}-s\right)t^2=0$$

$$\Leftrightarrow s\left(t^2-2t+4\right)=\frac{t^2-3t+8}{3}$$

$$\therefore s=\frac{t^2-3t+8}{3\left(t^2-2t+4\right)}\ \left(\because t^2-2t+4=(t-1)^2+3>0\right)$$

となる。よって，$s=\dfrac{t^2-3t+8}{3\left(t^2-2t+4\right)}$ を代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\left\{\frac{t^2-3t+8}{3\left(t^2-2t+4\right)}-\frac{2}{3}\right\}\vec{a}+\left\{\frac{1}{3}-\frac{t^2-3t+8}{3\left(t^2-2t+4\right)}\right\}\vec{b}$$

$$=-\frac{1}{3\left(t^2-2t+4\right)}\left\{t(t-1)\vec{a}-(t-4)\vec{b}\right\}$$

となる。したがって，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right|^2=\frac{1}{9\left(t^2-2t+4\right)^2}\left\{t^2(t-1)^2\left|\vec{a}\right|^2\right.$$

$$\left.-2t(t-1)(t-4)\vec{a}\cdot\vec{b}+(t-4)^2\left|\vec{b}\right|^2\right\}$$

$$=\frac{1}{9\left(t^2-2t+4\right)^2}\left\{4t^2(t-1)^2\right.$$

$$\left.-2t^2(t-1)(t-4)+t^2(t-4)^2\right\}\ \text{(F)}$$

$$=\frac{t^2}{9\left(t^2-2t+4\right)^2}\cdot\left(3t^2-6t+12\right)$$

$$=\frac{t^2}{3\left(t^2-2t+4\right)}$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right|=\frac{t}{\sqrt{3\left(t^2-2t+4\right)}}\ \text{(C)}\quad (\because t>0)$$

となる。

(答) $\mathrm{DG}=\dfrac{t}{\sqrt{3\left(t^2-2t+4\right)}}$

(F) $\left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right|^2$ を t で表して‥2 点

(C)答‥3 点

(4)

$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}$ となるとき,(A 1/2) △BCG と△BDG において直角三角形の斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいので，△BCG ≡ △BDG が成立

(4) 10 点 (A)(B)(C)

(A) $\mathrm{BC}=\mathrm{BD}$ のとき $\mathrm{CG}=\mathrm{DG}$ が成立

する。したがって，$\mathrm{CG}=\mathrm{DG}$ が成立する。(A 2/2) $\mathrm{G}\left(\frac{t+1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ から

$\mathrm{CG}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ であるので $\mathrm{CG}=\mathrm{DG}$ となる t の値は

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{t}{\sqrt{3\left(t^2-2t+4\right)}}\ \text{(B)}\ (\because (3))$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2-2t+4}=t$$

$$\Leftrightarrow t^2-2t+4=t^2\ \left(\because t>0\right)$$

$$\Leftrightarrow t=2\ \text{(C)}$$

となる。

(答) $t=2$

‥4 点

(B)立式‥3 点

(C)答‥3 点

(5)

(3)より

$$\mathrm{DG}=\frac{t}{\sqrt{3\left(t^2-2t+4\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{12}{t^2}-\frac{6}{t}+3}}\ \text{(A)}\ \ (\because t>0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{12\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}}}\ \text{(B)}$$

であり，

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow t=4\ \text{(C1/2)}$$

のとき，DG は

最大値 $\frac{2}{3}$ (C2/2)

をとる。

(答) $t=4$ のとき最大値 $\frac{2}{3}$

(5) 10 点 (A)(B)(C)

(A)分子分母を t で割る‥3 点

(B) $\frac{1}{t}$ について平方完成‥3 点

(C)答‥4 点(各 2 点×2)

(5)[別解]

$f(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+4}}$ とすると，

(5)[別解] 10 点 (D)(E)(C)

$$f'(t)=\frac{\sqrt{t^2-2t+4}-t\cdot\dfrac{2t-2}{2\sqrt{t^2-2t+4}}}{t^2-2t+4}$$

$$=-\frac{t-4}{\left(t^2-2t+4\right)^{\frac{3}{2}}}\text{(D)}$$

となる。よって，$f(t)$ の増減表(E)は以下のようになる。

t	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↘

したがって，$f(t)$ は $t=4$ のとき，最大値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。よって，

$\mathrm{DG}=\frac{1}{\sqrt{3}}f(t)$ より

$t=4$(C1/2)

のとき，DG は

最大値 $\frac{2}{3}$(C2/2)

をとる。

(答) $t=4$ のとき最大値 $\frac{2}{3}$

(D) $f'(t)$ ‥3 点

(E)増減表‥3 点

・$t=4$ のみで極大値をとることがわかれば可

・極値は不要

(C)答‥4 点(各 2 点×2)

〔2〕 （４０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha\beta=2\end{cases}\text{(A)}$$

となる。したがって，

$$p_1=\alpha+\beta=6\text{(B)}$$

$$\begin{aligned}p_2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=6^2-2\cdot2\\&=32\text{(C)}\end{aligned}$$

となる。また，

$$\begin{aligned}p_{n+2}&=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\\&=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)\\&=6p_{n+1}-2p_n\text{(D)}\end{aligned}$$

となる。

(答) $p_1=6,\ p_2=32,\ p_{n+2}=6p_{n+1}-2p_n$

(1) ９点 (A)(B)(C)(D)

(A) 解と係数の関係を利用 ‥2 点(完答)

(B) $p_1=6$ ‥2 点

(C) $p_2=32$ ‥2 点

(D) $p_{n+2}=6p_{n+1}-2p_n$ ‥3 点

(2)

$p_{n+2}=6p_{n+1}-2p_n$ であり，$p_1,\ p_2$ は整数より p_n は帰納的に整数(A)となる。任意の自然数 n に対して，$p_{n+1}>p_n>0$ となることを数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき

(1)より $p_2>p_1>0$ となり，成立する。

[2] $n=k$ （k は自然数)のとき

$p_{k+1}>p_k>0$ が成立すると仮定すると，

$$\begin{aligned}p_{k+2}&=6p_{k+1}-2p_k\\&>6p_{k+1}-2p_{k+1}\\&=4p_{k+1}\\&>p_{k+1}\ (\because p_{k+1}>0)\end{aligned}$$

となる。したがって，$n=k+1$ のときも成立する。

(2) ９点 (A)(B)(C)

(A) p_n が整数‥3 点

[1], [2]より，任意の自然数 n に対して，$p_{n+1} > p_n > 0$ (B)となる。よって，p_n は自然数(C)である。

(証明終)

(B) $p_{n+1} > p_n > 0$ ‥3 点

(C) p_n が自然数‥3 点

(3)

任意の自然数 n に対して，n が奇数のとき，p_n を 3 で割った余りが 0，n が偶数のとき，p_n を 3 で割った余りが 2 となることを数学的帰納法を用いて証明する。(A)

[1] $n=1, 2$ のとき

(1)より $n=1, 2$ のとき p_n を 3 で割った余りがそれぞれ 0, 2 (B)となり，成立する。

[2] $n=2k-1, 2k$ (k は自然数)のとき

$n=2k-1$ のとき，p_n を 3 で割った余りが 0，$n=2k$ のとき，p_n を 3 で割った余りが 2 となると仮定する。よって，整数 a, b を用いて $p_{2k-1}=3a,\ p_{2k}=3b+2$ (C)と表せる。したがって，

$$\begin{aligned} p_{2k+1} &= 6p_{2k} - 2p_{2k-1} \\ &= 6\cdot(3b+2) - 2\cdot 3a \\ &= 3(-2a+6b+4) \end{aligned}$$

となり，p_{2k+1} を 3 で割った余りが 0 となる。よって，整数 c を用いて $p_{2k+1}=3c$ と表せる。

$$\begin{aligned} p_{2k+2} &= 6p_{2k+1} - 2p_{2k} \\ &= 6\cdot 3c - 2\cdot(3b+2) \\ &= 3(-2b+6c-2)+2 \end{aligned}$$

となり，p_{2k+2} を 3 で割った余りが 2 となる。したがって，$n=2k+1, 2k+2$ のときも成立する。(D)

[1], [2]より，任意の自然数 n に対して，

n が奇数のとき，p_n を 3 で割った余りが 0 (E1/2)

n が偶数のとき，p_n を 3 で割った余りが 2 (E2/2)

となる。

(答) n が奇数のとき 0，n が偶数のとき 2

(3) 12 点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A)数学的帰納法を用いる方針‥3 点

(B) $n=1, 2$ のとき成立‥2 点(完答)

(C)仮定を数式化する‥2 点

(D) $n=2k+1, 2k+2$ のとき成立‥2 点(完答)

(E)答‥3 点(完答)

(3)[別解]

(1)より p_1 を 3 で割った余りが 0，p_2 を 3 で割った余りが 2 (B)となる。以下，法を 3 とすると，(F)

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= 6p_{n+1} - 2p_n \\ &\equiv p_n \end{aligned}$$ (G)

(3)[別解] 12 点 (B)(E)(F)(G)

(B) $p_1 \equiv 0,\ p_2 \equiv 2 \pmod 3$ ‥2 点(完答)

(F)合同法を用いる方針‥3 点

(G) $p_{n+2} \equiv p_n \pmod 3$ ‥4 点

となる。したがって，任意の自然数nに対して，

nが奇数のとき，p_nを3で割った余りが0 (E1/2)

nが偶数のとき，p_nを3で割った余りが2 (E2/2)

となる。

(答) nが奇数のとき0，nが偶数のとき2

(E)答‥3点(完答)

(4)

$(\alpha, \beta)=\left(3+\sqrt{7}, 3-\sqrt{7}\right)$となり，$2<\sqrt{7}<3$より$0<\beta<1$となる。よって，

$0<\beta^{2026}<1$ (A)

となる。また，(3)より整数dを用いて，

$\alpha^{2026}+\beta^{2026}=3d+2$ (B)

と表せる。したがって，

$3d+1<\alpha^{2026}<3d+2$

となるため，α^{2026}を超えない最大の整数を3で割った余りは1 (C)となる。

(答) 1

(4) 10点 (A)(B)(C)

(A) $0<\beta^{2026}<1$‥3点

(B) $\alpha^{2026}+\beta^{2026}$を3で割った余りが2‥3点

(C)答‥4点

〔3〕　（４０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

（答）$(a_1, a_2)=(3, 4), (4, 3)$ (A)

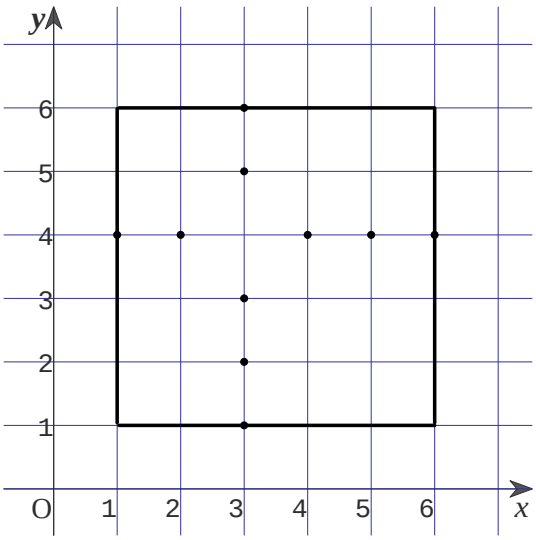
(1)　5 点（A）

(A)答‥5 点（完答）

(2)

x 軸あるいは y 軸に平行な線分を縦あるいは横の線分，x 軸と y 軸に平行でない線分を斜めの線分であるとする。OA の長さが正の整数となることから，(1)より $(a_1, a_2)=(3, 4), (4, 3)$ である。ここで，この 2 点や第一象限は直線 $y=x$ に関して対称であることから，$(a_1, a_2)=(3, 4)$ のときのみを考える。つまり，OA の長さが正の整数となる条件のもとで，AB の長さが正の整数となるための (a_3, a_4) の条件を求める。$0 \leqq |a_3-3| \leqq 3$，$0 \leqq |a_4-4| \leqq 3$ より

$(|a_3-3|, |a_4-4|)=(3, 4), (4, 3)$ は成立せず，(1)から線分 AB が斜めの線分で長さが正の整数となることはない。(A)線分 AB が縦あるいは横の線分で長さが正の整数となるとき，下図の通り，10 通りとなる。



(2)　10 点（A)(B)

(A)線分 AB が斜めの線分で長さが正の整数とならないことを言って‥5 点

$(a_1, a_2)=(4, 3)$ の場合を考えて，$10\cdot 2=20$ (通り) と求まる。さいころを 4 回振るときの出る目の場合の数は 6^4 通りであるから，求める確率は

$$\frac{20}{6^4}=\frac{5}{324}\ \text{(B)}$$

となる。

(答) $\frac{5}{324}$

(B)答‥5 点

(3)

[1] 線分 AB が縦あるいは横の線分のとき (A 1/2)

縦あるいは横の直線はそれぞれ 6 通り，計 12 通りあり，それぞれの直線において AB=5 となる線分の取り方は 1 通りである。それぞれの線分のうち，どちらの点を点 A とするかで 2 通りあるため，求める場合の数は

$$12\cdot 1\cdot 2=24\ \text{(通り)}\ \text{(B)}$$

である。

[2] 線分 AB が斜めの線分のとき (A 2/2)

(1)より $(|a_3-a_1|, |a_4-a_2|)=(3, 4), (4, 3)$ となる。対称性より $a_1 \leqq a_3$ かつ $a_2 \leqq a_4$ とし，

$$(a_3-a_1, a_4-a_2)=(3, 4)$$

の場合を考える。このとき，

$$(a_1, a_3)=(1, 4), (2, 5), (3, 6)$$
$$(a_2, a_4)=(1, 5), (2, 6)$$

の組が挙げられる。したがって，求める場合の数は

$$3\cdot 2=6\ \text{(通り)}$$

となる。対称性を考慮すると，$6\cdot 2\cdot 4=48$ 通り (C) となる。

以上[1], [2]より，AB=5 となるのは

$$24+48=72\ \text{(通り)}$$

であり，求める確率は

$$\frac{72}{6^4}=\frac{1}{18}\ \text{(D)}$$

となる。

(答) $\frac{1}{18}$

(3)　15 点 (A)(B)(C)(D)

(A)場合分けして‥3 点

(B)[1]の場合の数を求めて‥3 点

(C)[2]の場合の数を求めて‥4 点

(D)答‥5 点

(4)

線分ABの長さが5以外の正の整数となる場合の数を求める。(A)線分ABが斜めの線分で長さが正の整数となるとき，(1)より線分ABの長さが斜めの線分で5以外の正の整数となることはない。線分ABが縦あるいは横の線分で長さが正の整数となるとき，(3)より直線の選び方は12通りある。それぞれの直線上での線分の取り方は直線上の6点から2点選ぶときの場合の数に等しく，

$$ {}_6C_2 = 15 \text{(通り)} $$

である。ただし，AB=5となる線分の取り方である1通りを除いて14通り(B)となる。それぞれの線分のうち，どちらの点を点Aとするかで2通りあるため，求める場合の数は

$$ 12 \cdot 14 \cdot 2 = 336 \text{(通り)} $$

である。よって，(3)より線分ABの長さが正の整数となる場合の数は

$$ 336 + 72 = 408 \text{(通り)} \quad \text{(C)} $$

となる。したがって，求める条件付き確率は

$$ \frac{\frac{72}{6^4}}{\frac{408}{6^4}} = \frac{3}{17} \quad \text{(D)} $$

となる。

(答) $\frac{3}{17}$

(4)　10点 (A)(B)(C)(D)

(A)線分ABの長さが5以外の正の整数となる場合の数を求める方針‥2点

(B)線分ABの長さが5以外の正の整数となる場合の数を求めて‥3点

(C)線分ABの長さが正の整数となる場合の数を求めて‥2点

(D)答‥3点

〔4〕　（40点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

z が中心1，半径1の円周上(原点は除く)を動くので，

$|z-1|=1$ (A)　$(z \neq 0)$

を満たす。また，

$$\alpha=\frac{1}{z} \Leftrightarrow z=\frac{1}{\alpha}\ (\because \alpha \neq 0)$$

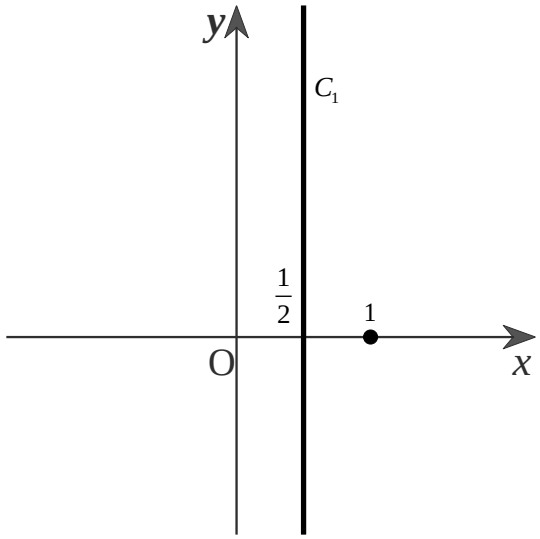
となり，これを $|z-1|=1$ に代入して，

$$\left|\frac{1}{\alpha}-1\right|=1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1-\alpha}{\alpha}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|=|\alpha-1| \text{ (B)}$$

となる。よって，点 α は原点と点1を結ぶ線分の垂直二等分線上(C)を動き，軌跡を図示すると，以下のようになる。



(D)

(答)前図

(1)　10点 (A)(B)(C)(D)

(A) $|z-1|=1$ ‥3点

(B) $|\alpha|=|\alpha-1|$ ‥2点

(C)点 α が原点と点1を結ぶ線分の垂直二等分線上‥2点

(D)図示‥3点

(1)[別解] ($|\alpha|=|\alpha-1|$ を導くまでは同じ)(A)(B)(D)

両辺正より，2乗して，

(1)[別解]　10点　(A)(B)(D)(E)

(A)(B)(D)共通部分‥8点

$$|\alpha|^2-\alpha-\bar{\alpha}+1=|\alpha|^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}=\frac{1}{2}$$

となる。したがって，点 α は実部が $\frac{1}{2}$ となる直線上(E)を動き，図示すると，次のようになる。(以下，同様)

(E)点 α が実部が $\frac{1}{2}$ となる直線上

‥2 点

(2)

z が中心 1，半径 $r\ (r>1)$ の円周上を動くので，

$$|z-1|=r$$

を満たす。(1)より $z=\frac{1}{\alpha}$ を $|z-1|=r$ に代入して，

$$\left|\frac{1}{\alpha}-1\right|=r$$

$$\Leftrightarrow |\alpha-1|=r|\alpha| \text{ (A)}$$

となる。両辺正より，2 乗して，(B)

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2-\alpha-\bar{\alpha}+1=r^2|\alpha|^2$$
$$\Leftrightarrow (r^2-1)|\alpha|^2+\alpha+\bar{\alpha}-1=0$$
$$\Leftrightarrow |\alpha|^2+\frac{\alpha}{r^2-1}+\frac{\bar{\alpha}}{r^2-1}-\frac{1}{r^2-1}=0\ (\because r^2-1>0)$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha+\frac{1}{r^2-1}\right)\left(\bar{\alpha}+\frac{1}{r^2-1}\right)=\frac{1}{(r^2-1)^2}+\frac{1}{r^2-1}$$
$$\Leftrightarrow \left|\alpha+\frac{1}{r^2-1}\right|^2=\left(\frac{r}{r^2-1}\right)^2$$
$$\therefore \left|\alpha+\frac{1}{r^2-1}\right|=\frac{r}{r^2-1}\ \left(\because \left|\alpha+\frac{1}{r^2-1}\right|>0,\ \frac{r}{r^2-1}>0\right)$$

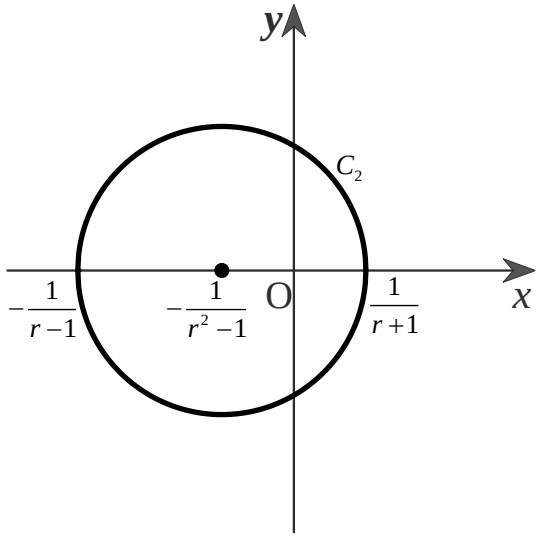
となる。よって，点 α は中心 $-\frac{1}{r^2-1}$，半径 $\frac{r}{r^2-1}$ の円周上(C)を動き，軌跡を図示すると，次のようになる。

(2)　12 点 (A)(B)(C)(D)

(A) $|\alpha-1|=r|\alpha|$ **‥4 点**

(B) 2 **乗して式変形する方針‥2 点**

(C)円の中心と半径‥3 点(完答)



(D)

(答)前図

(D)図示‥3 点

(2)[別解] ($r|\alpha|=|\alpha-1|$ を導くまでは同じ)(A)(D)

$|\alpha-1|=r|\alpha|$ より図形 C_2 の軌跡が原点との距離と点 1 との距離の比が $1:r$ となる点の集合であり，アポロニウスの円(E)となる。ここで，原点と点 1 を $1:r$ に内分する点は

$$\frac{r\cdot 0+1\cdot 1}{r+1}=\frac{1}{r+1}$$

となり，原点と点 1 を $1:r$ に外分する点は

$$\frac{r\cdot 0-1\cdot 1}{r-1}=-\frac{1}{r-1}$$

となる。図形 C_2 の軌跡はこの 2 点を直径とする円であることから，円の中心は

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r+1}+\left(-\frac{1}{r-1}\right)\right\}=-\frac{1}{r^2-1}\ \text{(C1/2)}$$

であり，円の半径は

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r+1}-\left(-\frac{1}{r-1}\right)\right\}=\frac{r}{r^2-1}\ \text{(C2/2)}$$

となる。(以下，同様)

(2)[別解]　12 点 (A)(D)(E)(C)

(A)(D)共通部分‥7 点

(E)アポロニウスの円である‥2 点

(C)円の中心と半径‥3 点(完答)

(3)

w が図形 C_1 上を動くとき，実数 s を用いて，w は

$$w=\frac{1}{2}+si\ \text{(A)}$$

と表される。これを $\beta=w^2$ に代入して，

(3)　10 点 (A)(B)(C)(D)

(A) $w=\frac{1}{2}+si$ ‥3 点

$$\beta=\left(\frac{1}{2}+si\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{4}-s^2\right)+si$$ (B)

となる。ここで，実数 $x,\ y$ を用いて，$\beta=x+yi$ とおくと，

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{4}-s^2,\ s\right)$$

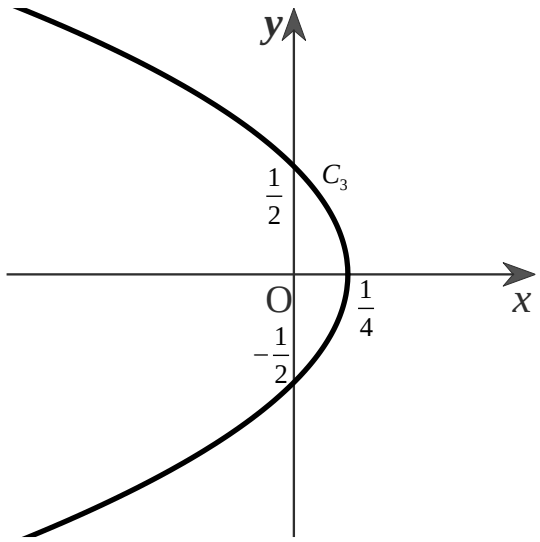
となる。よって，

$$x=\frac{1}{4}-y^2$$ (C)

を満たす。$y=s$ であり，s は実数より y はすべての実数をとりうる。

したがって，点 β は放物線 $x=\frac{1}{4}-y^2$ 上を動き，軌跡を図示すると，

次のようになる。



(D)

(答)前図

(B) β を s で表して‥2 点

(C) $x,\ y$ の関係式‥2 点

(D)図示‥3 点

(4)

(2), (3)より図形 C_2 と図形 C_3 はともに実軸対称である。したがって，対称性から図形 C_2 と図形 C_3 の共有点が1つとなるとき，共有点は実軸上(A)にある。よって，$-\frac{1}{r^2-1}<0$ より共有点が1つとなるとき

$$-\frac{1}{r^2-1}+\frac{r}{r^2-1}=\frac{1}{4}$$ (B)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r+1}=\frac{1}{4}$$

(4)　8 点 (A)(B)(C)

(A)共有点が実軸上‥3 点

(B)立式‥2 点

$\therefore r=3$ (C)

となる。このとき，C_2 は中心 $-\frac{1}{8}$，半径 $\frac{3}{8}$ の円であり，xy 平面上で表すと，

$$C_2 : \left(x+\frac{1}{8}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{64}$$

となる。C_2 と C_3 の方程式を連立して，

$$\left\{\left(\frac{1}{4}-y^2\right)+\frac{1}{8}\right\}^2 + y^2 = \frac{9}{64}$$

$$\Leftrightarrow y^2\left(y^2+\frac{1}{4}\right)=0$$

$\therefore y=0$ （y は実数）

となり，確かに共有点は 1 つである。

(答) $r=3$

(C)答‥3 点

〔５〕　（４０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

a, b, c, d を実数として，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$とおく。点$(1, 1)$における法線の傾きは$1$より，点$(1, 1)$における接線の傾きは$-1$となる。また，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$である。よって，問題文の条件から，

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(1)=1 \\ f'(1)=-1 \end{cases} \text{(A)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=1 \\ a+b=0 \\ 3a+2b=-2 \end{cases}$$

$$\therefore (a, b, c, d)=(-2, 2, 1, 0)$$

であり，

$$f(x)=-2x^3+2x^2+x \text{(B)}$$

となる。また，$f'(x)=-6x^2+4x+1$である。ここで，$f'(x)=0$とすると，

$$-6x^2+4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 6\cdot(-1)}}{2\cdot 6}$$

$$\therefore x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{6}$$

であるから，増減表(C)は

x	$\cdots$	$\frac{2-\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	$\frac{2+\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

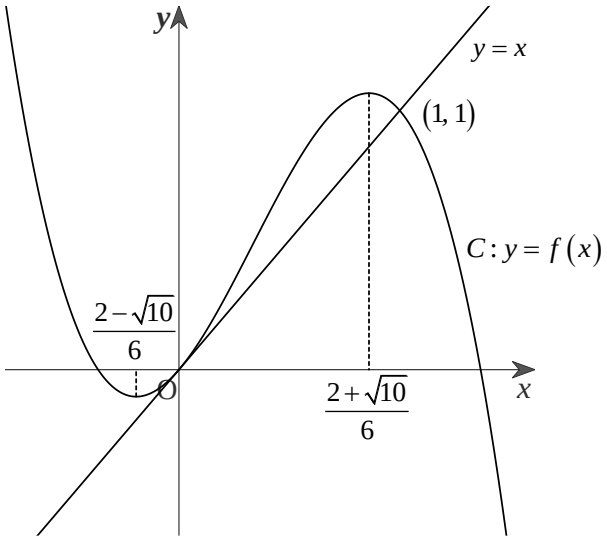
(1)　14点 (A)(B)(C)(D)

(A)条件をすべて示す‥2点(完答)

(B) $f(x)$を正しく求める‥4点

(C)増減表を正しく示す‥4点

となる。したがって，曲線Cおよび$y=x$を図示すると次図の通りである。



(D)

(答) $f(x)=-2x^3+2x^2+x$，前図

(D)正しく図示する‥4 点

(2)

求める体積は

$$\int_0^1 \pi\{f(x)\}^2\,dx-\int_0^1 \pi x^2 dx \text{ (A)}$$

$$=\int_0^1 \pi\left\{\left(-2x^3+2x^2+x\right)^2-x^2\right\}dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(4x^6-8x^5+4x^3\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{4}{7}x^7-\frac{4}{3}x^6+x^4\right]_0^1$$

$$=\frac{5}{21}\pi \text{ (B)}$$

となる。

(答) $\frac{5}{21}\pi$

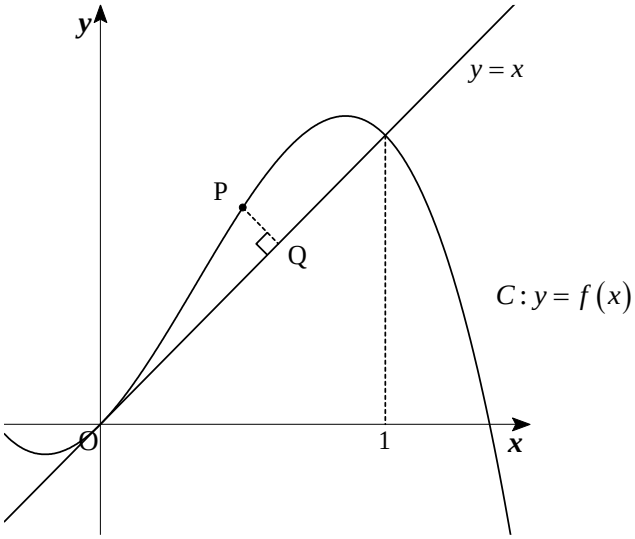
(2) 8 点 (A)(B)

(A)正しく立式する‥2 点

(B)答‥6 点

(3)

(3) 8 点 (A)(B)



直線PQは $y=-x+t+f(t)$ であるから，点Qの x 座標は

$$-x+t+f(t)=x$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{t+f(t)}{2}$$

$$\therefore x=-t^3+t^2+t$$

となる。よって，

$$\mathrm{OQ}=\sqrt{2}\left(-t^3+t^2+t\right)\ \text{(A)}$$

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\left(-t^3+t^2\right)\ \text{(B)}$$

である。

(答) $\mathrm{OQ}=\sqrt{2}\left(-t^3+t^2+t\right),\ \mathrm{PQ}=\sqrt{2}\left(-t^3+t^2\right)$

(A)線分OQの長さを t で表して‥4点

(B)線分PQの長さを t で表して‥4点

(4)

$\mathrm{OQ}=X,\ \mathrm{PQ}=Y(X)$ とすると，求める体積は

$$\int_0^{\sqrt{2}}\pi Y(X)^2\,dX$$

$$=\int_0^1\pi Y(X)^2\frac{dX}{dt}dt$$

$$=\int_0^1\pi\cdot 2\left(-t^3+t^2\right)^2\cdot\sqrt{2}\left(-3t^2+2t+1\right)dt\ \text{(A)}\ (\because (3))$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_0^1\left(-3t^8+8t^7-6t^6+t^4\right)dt$$

$$=2\sqrt{2}\pi\left[-\frac{t^9}{3}+t^8-\frac{6t^7}{7}+\frac{t^5}{5}\right]_0^1$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{105}\pi\ \text{(B)}$$

(4)　10点 (A)(B)

(A)求める体積を t の定積分で正しく表す‥4点

(B)答‥6点

となる。

(答) $\dfrac{2\sqrt{2}}{105}\pi$