$\boxed{1}$（５０点）

【解答・採点基準】

$$\begin{cases} 2^{B(n)-1} \leqq n < 2^{B(n)} \\ 3^{T(n)-1} \leqq n < 3^{T(n)} \end{cases}$$

である。$B(n)+T(n)$ が偶数となるのは，$B(n)$ と $T(n)$ の偶奇が一致するときである。

[1]　$B(n), T(n)$ がともに偶数になるとき

$B(n)$ が偶数となるのは，$2^{10} < 2022 < 2^{11}$ より，

$2^1 \leqq n < 2^2,\ 2^3 \leqq n < 2^4,\ 2^5 \leqq n < 2^6,$
$2^7 \leqq n < 2^8,\ 2^9 \leqq n < 2^{10}$

$\Leftrightarrow 2 \leqq n < 4,\ 8 \leqq n < 16,\ 32 \leqq n < 64,$

$128 \leqq n < 256,\ 512 \leqq n < 1024$　　・・・①

となるときであり，$T(n)$ が偶数となるのは，$3^6 < 2022 < 3^7$ より，

$3^1 \leqq n < 3^2,\ 3^3 \leqq n < 3^4,\ 3^5 \leqq n < 3^6$

$\Leftrightarrow 3 \leqq n < 9,\ 27 \leqq n < 81,\ 243 \leqq n < 729$　　・・・②

となるときである。よって，条件を満たすのは

①かつ②

$\Leftrightarrow 3 \leqq n < 4$，$8 \leqq n < 9$，$32 \leqq n < 64$，

$243 \leqq n < 256$，$512 \leqq n < 729$

のときである。

[2]　$B(n), T(n)$ がともに奇数になるとき

[1]と同様にして，$B(n)$ が奇数となるのは，

$2^0 \leqq n < 2^1,\ 2^2 \leqq n < 2^3,\ 2^4 \leqq n < 2^5,\ 2^6 \leqq n < 2^7,$
$2^8 \leqq n < 2^9,\ 2^{10} \leqq n \leqq 2022$

$\Leftrightarrow 1 \leqq n < 2,\ 4 \leqq n < 8,\ 16 \leqq n < 32,\ 64 \leqq n < 128,$

$256 \leqq n < 512,\ 1024 \leqq n \leqq 2022$　　・・・③

となるときであり，$T(n)$ が奇数となるのは，

$3^0 \leqq n < 3^1,\ 3^2 \leqq n < 3^3,\ 3^4 \leqq n < 3^5,\ 3^6 \leqq n \leqq 2022$

$\Leftrightarrow 1 \leqq n < 3,\ 9 \leqq n < 27,$

$81 \leqq n < 243,\ 729 \leqq n \leqq 2022$　　・・・④

50 点

n と $B(n), T(n)$ の関係式・・10 点（各 5 点×2）

[1]，[2]の場合分けの方針・・10 点

[1]の場合の n の値の範囲・・10 点

となるときである。よって，条件を満たすのは

③かつ④

$\Leftrightarrow 1 \leqq n < 2$，$16 \leqq n < 27$，$81 \leqq n < 128$，$1024 \leqq n \leqq 2022$

のときである。

[2]の場合の n の値の範囲‥10 点

以上, [1], [2]より，求める正の整数 n の個数は

$$\begin{aligned}&(4-3)+(9-8)+(64-32)+(256-243)+(729-512)\\&+(2-1)+(27-16)+(128-81)+(2022-1024+1)\end{aligned}$$

$=1322$　(個)

である。

(答)　1322 個

答‥10 点

[別解]

[別解]　50 点

$n=1, 2, 3, \cdots$ としたときの $B(n)$ の変化を考えると，$n=2^k$ (ただし k は正の整数)となるときのみ $B(n)$ が 1 増加して，それ以外の場合では $B(n)$ は変化しない。同様に，$n=3^l$ (ただし l は正の整数)となるときのみ $T(n)$ が 1 増加して，それ以外の場合では $T(n)$ は変化しない。ここで，2 と 3 は互いに素であるから，$2^k=3^l$ となる (k, l) は存在しない。したがって，$n=2^k$ または $n=3^l$ となるときのみ $B(n)+T(n)$ が 1 増加して，それ以外の場合では $B(n)+T(n)$ は変化しない。

n に対する $B(n), T(n)$ の変化‥10 点(各 5 点×2)

n に対する $B(n)+T(n)$ の変化‥10 点

$$\begin{aligned}&2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64,\\&2^7=128,\ 2^8=256,\ 2^9=512,\ 2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048\end{aligned}$$

$$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ 3^6=729,\ 3^7=2187$$

であるから，$n=2^k$ または $n=3^l$ となる 2022 以下の n を小さい順に並べると

2, 3, 4, 8, 9, 16, 27, 32, 64, 81, 128, 243, 256, 512, 729, 1024

となる。$B(1)+T(1)=1+1=2$ であるから，

昇順に並び替え‥10 点

$$\begin{aligned}&1 \leqq n < 2,\ 3 \leqq n < 4,\ 8 \leqq n < 9,\ 16 \leqq n < 27,\ 32 \leqq n < 64,\\&81 \leqq n < 128,\ 243 \leqq n < 256,\ 512 \leqq n < 729,\ 1024 \leqq n \leqq 2022\end{aligned}$$

n の値の範囲‥10 点

のときに，それぞれ $B(n)+T(n)=2, 4, 6, \cdots$ となり条件を満たす。

したがって，求める正の整数 n の個数は

$$\begin{aligned}&(2-1)+(4-3)+(9-8)+(27-16)+(64-32)\\&+(128-81)+(256-243)+(729-512)+(2022-1024+1)\end{aligned}$$

$=1322$　(個)

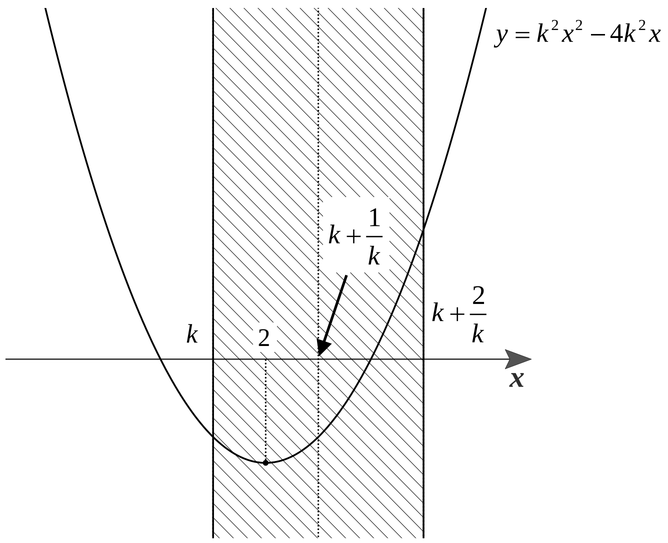
である。

(答) 1322 個

答・・10 点

$\boxed{2}$ （**５０点**）

【解答・採点基準】

$y=k^2x^2-4k^2x$ $\quad =k^2(x-2)^2-4k^2$ より，この関数のグラフは，軸が $x=2$ で下に凸の放物線である。 以下， [1]　$0<k<2$ [2]　$k \geqq 2$ の２つの場合に分けて考える。 [1]　$0<k<2$ のとき 区間 $k \leqq x \leqq k+\dfrac{2}{k}$ のちょうど中央にあたる $x=k+\dfrac{1}{k}$ について，$k>0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係から， $k+\dfrac{1}{k} \geqq 2\sqrt{k\cdot\dfrac{1}{k}}=2$ が成り立つ。したがって，関数 $y=k^2x^2-4k^2x$ のグラフは以下のようになる。  上図より，区間 $k \leqq x \leqq k+\dfrac{2}{k}$ において y は $x=2$ で最小，	**50 点** **軸が** $x=2$ **‥5 点** $k+\dfrac{1}{k} \geqq 2$ **が成り立つ‥5 点**

$x=k+\dfrac{2}{k}$ で最大となる。したがって，

$$\begin{aligned} m &= k^2\cdot 2^2-4k^2\cdot 2 \\ &= -4k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= k^2\left(k+\frac{2}{k}\right)^2-4k^2\left(k+\frac{2}{k}\right) \\ &= k^4-4k^3+4k^2-8k+4 \end{aligned}$$

であるから，

$$M-m=k^4-4k^3+8k^2-8k+4$$

となる。上式の右辺を $f(k)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(k) &= 4k^3-12k^2+16k-8 \\ &= 4(k-1)(k^2-2k+2) \\ &= 4(k-1)\{(k-1)^2+1\} \end{aligned}$$

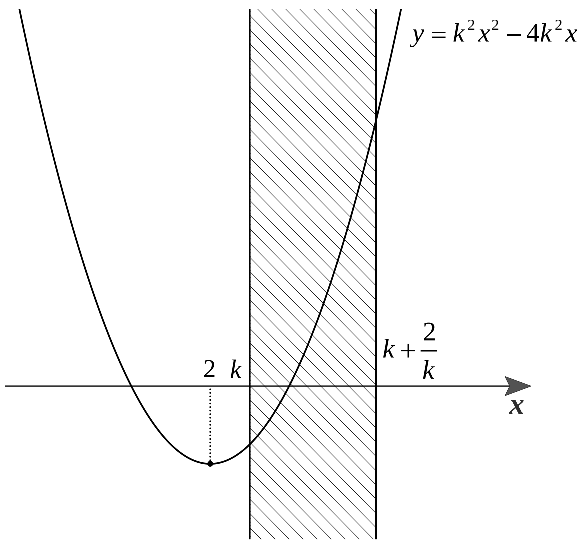
であり，$f'(k)=0 \Leftrightarrow k=1$ である。よって，$0<k<2$ における

$f(k)$ の増減表は以下のようになる。

k	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$f'(k)$		$-$	0	$+$	
$f(k)$		↘	1	↗	

よって，$0<k<2$ のとき，$M-m$ は $k=1$ で最小値 1 をとる。

[2] $k \geqq 2$ のとき



上図より，区間 $k \leqq x \leqq k+\dfrac{2}{k}$ において y は $x=k$ で最小，

$x=k+\dfrac{2}{k}$ で最大となる。したがって，

$0<k<2$ のとき，

$x=2$ で最小，

$x=k+\dfrac{2}{k}$ で最大

‥5 点（完答）

$0<k<2$ のときの $M-m$ を求める

‥5 点

$f(k)$ の増減表

‥5 点

$0<k<2$ のとき最小値 1 ‥5 点

$k \geqq 2$ のとき，

$x=k$ で最小，

$x=k+\dfrac{2}{k}$ で最大

‥5 点（完答）

$$m = k^4 - 4k^3$$
$$M = k^4 - 4k^3 + 4k^2 - 8k + 4$$

であるから，

$$M - m = 4k^2 - 8k + 4$$
$$= 4(k-1)^2$$

となる。よって，$k \geqq 2$ のとき，$M - m$ は $k = 2$ で最小値 4 をとる。

以上[1], [2]より，$M - m$ は $k = 1$ で最小となる。

(答)　$k = 1$

[$0 < k < 2$ の場合の別解]

[1]　$0 < k < 2$ のとき

$g(x) = k^2x^2 - 4k^2x = k^2\left\{(x-2)^2 - 4\right\}$ とする。$k > 0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係から，$k + \dfrac{2}{k} \geqq 2\sqrt{k \cdot \dfrac{2}{k}} = 2\sqrt{2} > 2$ が成り立ち，$k < 2 < k + \dfrac{2}{k}$ となるから $m = g(2)$ である。区間 $k \leqq x \leqq k + \dfrac{2}{k}$ の両端点と放物線の軸 $x = 2$ との距離を α, β とすると，$\alpha = 2 - k,\ \beta = k + \dfrac{2}{k} - 2$ であり，

$$\beta - \alpha = 2k + \frac{2}{k} - 4 \geqq 2\sqrt{2k \cdot \frac{2}{k}} - 4 = 0$$

であるから，$\beta \geqq \alpha$ となり，$M = g\left(k + \dfrac{2}{k}\right)$ となる。したがって，

$$M - m = k^2\left\{\left(k + \frac{2}{k} - 2\right)^2 - 4\right\} - k^2 \cdot (-4)$$
$$= k^2\left(k + \frac{2}{k} - 2\right)^2$$
$$= \left(k^2 - 2k + 2\right)^2$$
$$= \left\{(k-1)^2 + 1\right\}^2$$

となる。よって，$0 < k < 2$ のとき，$M - m$ は $k = 1$ で最小値 1 を

$k \geqq 2$ のときの $M - m$ を求める・・5 点

$k \geqq 2$ のとき最小値 4・・5 点

答・・5 点

[部分別解]　25 点

$\beta \geqq \alpha$ を示す・・5 点

$0 < k < 2$ のとき，$x = 2$ で最小，$x = k + \dfrac{2}{k}$ で最大・・5 点(完答)

$0 < k < 2$ のときの $M - m$ を求める・・5 点

$M - m = \left\{(k-1)^2 - 1\right\}^2$ と表す・・5 点

$0 < k < 2$ のとき最小値 1・・5 点

とる。

【注】

いきなり「$x=k+\dfrac{1}{k}$ が放物線の軸と一致する場合に $M-m$ が最小となる」すなわち

「$k+\dfrac{1}{k}=2$ となるときに $M-m$ が最小となる」ということを述べている解答は不可。

$\boxed{3}$ （５０点）

【解答・採点基準】

(1)

数学的帰納法を利用して，m を正の整数としたとき

$$\frac{2}{3} < a_{2m} \leqq \frac{3}{4} \qquad ・・・①$$

となることを示す。

[1] $m=1$ のとき

$$a_2 = 3a_1(1-a_1) = \frac{3}{4}$$

より $m=1$ のとき①が成り立つ。

[2] $m=k$ (k は正の整数)のとき

①が成り立つと仮定すると，$\frac{2}{3} < a_{2k} \leqq \frac{3}{4}$ である。ここで，

$f(x)=3x(1-x)$ とおくと

$a_{n+1} = f(a_n)\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

であり，

$$f(x) = -3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

より，$f(x)$ は $\frac{2}{3} < x \leqq \frac{3}{4}$ のとき x に対して単調に減少するから，$\frac{2}{3} < a_{2k} \leqq \frac{3}{4}$ より

$$f\left(\frac{3}{4}\right) \leqq f(a_{2k}) < f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore \frac{9}{16} \leqq a_{2k+1} < \frac{2}{3}$$

となる。同様に，$f(x)$ は $\frac{9}{16} \leqq x < \frac{2}{3}$ のとき x に対して単調に減少するから，

(1)　25 点

[1]の証明‥5 点

単調減少‥5 点

a_{2k+1} の値の範囲‥5 点

$$f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(a_{2k+1}\right)\leqq f\left(\frac{9}{16}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}<a_{2k+2}\leqq\frac{189}{256}$$
$$\therefore \frac{2}{3}<a_{2(k+1)}\leqq\frac{3}{4}\left(\because \frac{3}{4}>\frac{189}{256}\right)$$

となる。よって，$m=k+1$のときも①が成り立つ。

以上, [1], [2]より，mを正の整数としたとき①が成り立つから，題意は示された。

(証明終)

(1)[別解]

([1]までは本解と共通)

[2]　$m=k$ (kは正の整数)のとき

①が成り立つと仮定すると，$\frac{2}{3}<a_{2k}\leqq\frac{3}{4}$である。ここで,

$$\begin{aligned}a_{2k+2}&=3a_{2k+1}\left(1-a_{2k+1}\right)\\&=3\cdot3a_{2k}\left(1-a_{2k}\right)\cdot\left\{1-3a_{2k}\left(1-a_{2k}\right)\right\}\\&=9\left(a_{2k}-4a_{2k}{}^{2}+6a_{2k}{}^{3}-3a_{2k}{}^{4}\right)\end{aligned}$$

より，$g(x)=9\left(x-4x^2+6x^3-3x^4\right)$とおくと$a_{2k+2}=g\left(a_{2k}\right)$であり,

$$\begin{aligned}g'(x)&=9\left(1-8x+18x^2-12x^3\right)\\&=9(-2x+1)\left(6x^2-6x+1\right)\\&=-108\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{12}\right\}\end{aligned}$$

となる。$\frac{2}{3}<x\leqq\frac{3}{4}$の範囲で,

$$\frac{1}{6}<x-\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{4}$$
$$\therefore\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^2<\frac{1}{12}$$

より$g'(x)>0$となるから，$g(x)$は単調に増加する。したがって，$\frac{2}{3}<a_{2k}\leqq\frac{3}{4}$より,

[2]の証明‥5点

証明終‥5点

(1)[別解]　25点

共通部分‥5点

a_{2k+2}をa_{2k}で表して‥5点

単調増加‥5点

$$g\left(\frac{2}{3}\right)<g\left(a_{2k}\right)\leqq g\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}<a_{2k+2}\leqq\frac{189}{256}$$
$$\therefore \frac{2}{3}<a_{2(k+1)}\leqq\frac{3}{4}\left(\because \frac{3}{4}>\frac{189}{256}\right)$$

となる。よって，$m=k+1$のときも①が成り立つ。 | [2]の証明‥5 点

以上, [1], [2]より，mを正の整数としたとき①が成り立つから，題意は示された。

(証明終) | 証明終‥5 点

(2) | (2)　25 点

nが偶数のとき $a_n-a_{n+2}>0$ となることを示せばよい。ここで， | $a_n-a_{n+2}>0$ を示す方針‥5 点

$$\begin{aligned} a_n-a_{n+2} &= a_n-3a_{n+1}\left(1-a_{n+1}\right) \\ &= a_n-3\cdot 3a_n\left(1-a_n\right)\cdot\left\{1-3a_n\left(1-a_n\right)\right\} \\ &= a_n\left(27a_n{}^3-54a_n{}^2+36a_n-8\right) \\ &= a_n\left(3a_n-2\right)^3 \end{aligned}$$

因数分解‥10 点

であり，nが偶数のとき $\frac{2}{3}<a_n\leqq\frac{3}{4}$ となるから，$3a_n-2>0$ より

$a_n-a_{n+2}>0$ となる。以上のことから，題意は示された。

(証明終) | 証明終‥10 点

(2)[別解] | (2)[別解]　25 点

(1)より nが偶数のとき $a_n>0$であるから，nが偶数のとき

$\frac{a_{n+2}}{a_n}<1$となることを示せばよい。ここで， | $\frac{a_{n+2}}{a_n}<1$ を示す方針‥5 点

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+2}}{a_n} &= \frac{3a_{n+1}\left(1-a_{n+1}\right)}{a_n} \\ &= \frac{3\cdot 3a_n\left(1-a_n\right)\cdot\left\{1-3a_n\left(1-a_n\right)\right\}}{a_n} \\ &= 9\left(1-4a_n+6a_n{}^2-3a_n{}^3\right) \end{aligned}$$

であり，$h(x)=9\left(1-4x+6x^2-3x^3\right)$ とすると

$$\begin{aligned} h'(x) &= 9\left(-4+12x-9x^2\right) \\ &= -9\left(3x-2\right)^2 \end{aligned}$$

となる。$\frac{2}{3}<x\leqq\frac{3}{4}$のとき，$h'(x)<0$となるから$h(x)$は単調に減 | 単調減少‥10 点

少して

$$h(x) < h\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

が成り立つ。よって，n が偶数のとき $\frac{2}{3} < a_n \leqq \frac{3}{4}$ となるから，

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = h(a_n) < 1$$

が成り立つ。以上のことから，題意は示された。

(証明終)

証明終‥10 点

$\boxed{4}$ （５０点）

【解答・採点基準】

(1)

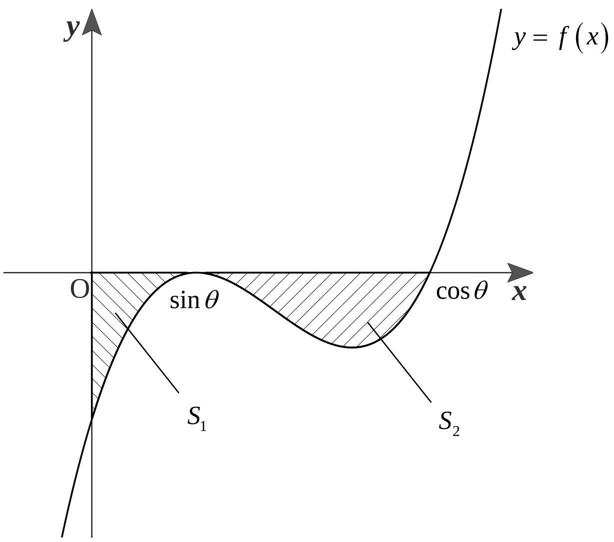
$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より $\cos\theta>0$ であるから

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta<\tan\frac{\pi}{4}=1$$
$$\Leftrightarrow \sin\theta<\cos\theta$$

となる。これより，関数 $f(x)=(x-\sin\theta)^2(x-\cos\theta)\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ について

$$\begin{cases} 0\leqq x<\sin\theta,\ \sin\theta<x<\cos\theta \text{ のとき} & f(x)<0 \\ x=\sin\theta,\ \cos\theta \text{ のとき} & f(x)=0 \end{cases}$$

となる。よって，C_1 と x 軸と y 軸で囲まれる領域，C_2 と x 軸で囲まれる領域をそれぞれ図示すると，次の図のようになる。



図示した領域の面積 S_1，S_2 は

$$S_1=\int_0^{\sin\theta}\{-f(x)\}dx$$
$$S_2=\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\{-f(x)\}dx$$

となる。これより

(1)　30 点

領域 S_1, S_2 を図示

・・5 点

$$
\begin{aligned}
S_1+S_2&=\int_0^{\sin\theta}\{-f(x)\}dx+\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\{-f(x)\}dx\\
&=\int_0^{\cos\theta}\{-f(x)\}dx\\
&=-\int_0^{\cos\theta}f(x)dx
\end{aligned}
$$

と表される。ここで

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\{x^2-2(\sin\theta)x+\sin^2\theta\}(x-\cos\theta)\\
&=x^3-(2\sin\theta+\cos\theta)x^2\\
&\qquad+(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)x-\sin^2\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

より，$f(x)$ の不定積分の1つ $F(x)$ は

$$
\begin{aligned}
F(x)=&\frac{x^4}{4}-\frac{2\sin\theta+\cos\theta}{3}x^3\\
&+\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2}x^2-(\sin^2\theta\cos\theta)x
\end{aligned}
$$

となる。したがって

$$
\begin{aligned}
&S_1+S_2\\
&=-\int_0^{\cos\theta}f(x)dx\\
&=-\big[F(x)\big]_0^{\cos\theta}\\
&=-\frac{\cos^4\theta}{4}+\frac{2\sin\theta+\cos\theta}{3}\cos^3\theta\\
&\qquad-\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2}\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta\\
&=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2}-\frac{\sin\theta\cos^3\theta}{3}+\frac{\cos^4\theta}{12}
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $S_1+S_2=\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2}-\dfrac{\sin\theta\cos^3\theta}{3}+\dfrac{\cos^4\theta}{12}$

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{S_1+S_2}{\cos^2\theta}&=\frac{(6\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\cos^2\theta}{12}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\\
&=\frac{6\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{12}
\end{aligned}
$$

である。また，2倍角の公式より

$$
\begin{aligned}
\frac{S_1+S_2}{\cos^2\theta}&=\frac{3(1-\cos2\theta)-2\sin2\theta+\dfrac{1+\cos2\theta}{2}}{12}\\
&=\frac{7-(4\sin2\theta+5\cos2\theta)}{24}
\end{aligned}
$$

S_1+S_2 を定積分の形で表示‥5点

$f(x)$ の不定積分‥10点

答‥10点

(2)　20点

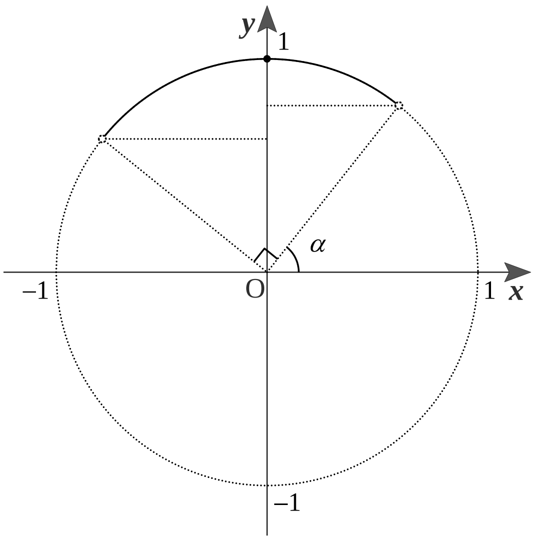
$\dfrac{S_1+S_2}{\cos^2\theta}$ を $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ で表示‥5点

となる。ここで，$4\sin 2\theta + 5\cos 2\theta$ の最大値を考える。三角関数の合成をすると

$$\begin{aligned}
&4\sin 2\theta + 5\cos 2\theta \\
&= \sqrt{4^2+5^2}\left(\frac{4}{\sqrt{4^2+5^2}}\sin 2\theta + \frac{5}{\sqrt{4^2+5^2}}\cos 2\theta\right) \\
&= \sqrt{41}\sin(2\theta+\alpha) \\
&\left(\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}},\ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

となる。

平方完成‥5 点



$0<\theta<\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0<2\theta<\frac{\pi}{2}$ に注意すると，$2\theta+\alpha$ の取りうる範囲は，単位円における実線部(ただし端点は含まない)に対応する。これより，この範囲での $\sin(2\theta+\alpha)$ の最大値は 1 となる。したがって，$4\sin 2\theta + 5\cos 2\theta$ の最大値は $\sqrt{41}$ となる。以上より，$\frac{S_1+S_2}{\cos^2\theta}$ の最小値は $\frac{7-\sqrt{41}}{24}$ となる。

(答) $\frac{7-\sqrt{41}}{24}$

答‥10 点

5 （５０点）

【解答・採点基準】

(1)

サイコロの目の出方は 6^4 通り存在し，いずれも同様に確からしい。3頂点が三角形をなすためには，2, 3, 4 回目に出る目が全て異なっていればよい。したがって，1回目に出る目は6通りのいずれでもよく，2, 3, 4 回目に出る目の順列は ${}_6P_3$ 通り存在するから，求める確率は

$$\frac{6\cdot{}_6P_3}{6^4}=\frac{5}{9}$$

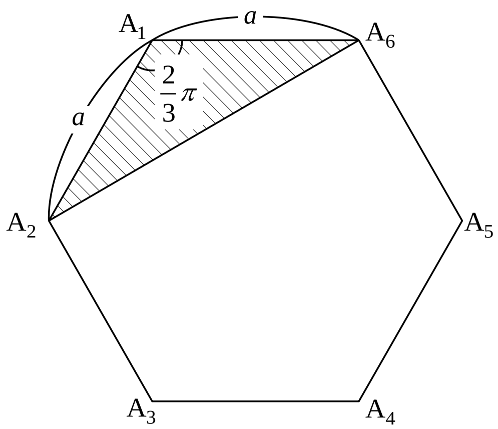
である。

(答) $\frac{5}{9}$

(2)

1回目に出た目を a とおく。選ばれた3頂点が三角形をなすときの面積を S とすると，その形は以下の3通りある。

[1] 正六角形と2辺を共有する場合



上図より

(1)　10 点

立式・・5 点

答・・5 点

(2)　40 点

[1], [2], [3]の場合分けの方針・・5 点

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

である。したがって，面積の条件より

$$S\geqq 6\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\geqq 6\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow a^2\geqq 24$$

であり，これを満たすサイコロの目は $a=5,\ 6$ の 2 通りである。また，3頂点の組合せは正六角形の頂点の数に一致し 6 通り，その各々について 2, 3, 4 回目の目の出方は 3! 通り存在する。よって，合計で

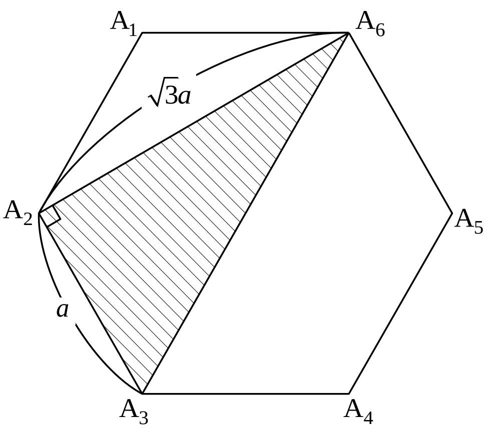
$2\cdot 6\cdot 3!$ 通り

である。

$a=5,\ 6$ ‥**5 点**

$2\cdot 6\cdot 3!(=72)$ **通り** ‥**5 点**

[2] 正六角形と 1 辺のみを共有する場合



上図のように，直角をはさむ 2 つの辺の長さが $a,\ \sqrt{3}a$ となるから，

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

である。したがって，面積の条件より

$$\begin{aligned}&S \geqq 6\sqrt{3}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \geqq 6\sqrt{3}\\ \Leftrightarrow\ &a^2 \geqq 12\end{aligned}$$

であり，これを満たすサイコロの目は $a = 4, 5, 6$ の 3 通りである。また，3 頂点の組合せは正六角形と共有する辺の選び方ともう 1 つの頂点の選び方を考えて $6 \cdot 2$ 通り，その各々について 2, 3, 4 回目の目の出方は $3!$ 通り存在する。よって，合計で

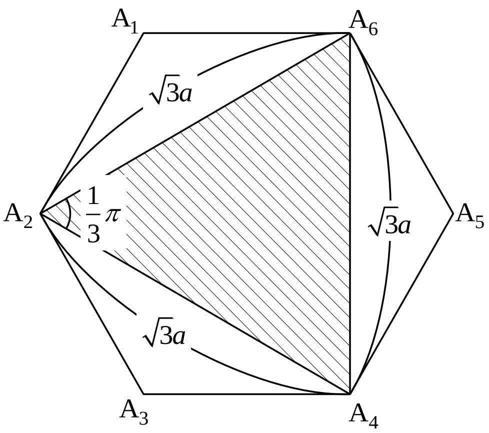
$a = 4, 5, 6$ ・・**5 点**

$3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3!$ 通り

である。

$3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3!(= 216)$ **通り・・5 点**

[3] 正六角形と辺を共有しない場合



上図のように 1 辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形となるから

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}a \cdot \sqrt{3}a \cdot \sin\frac{1}{3}\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

である。したがって，面積の条件より

$$\begin{aligned}&S \geqq 6\sqrt{3}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \geqq 6\sqrt{3}\\ \Leftrightarrow\ &a^2 \geqq 8\end{aligned}$$

であり，これを満たすサイコロの目は $a = 3, 4, 5, 6$ の 4 通り

$a = 3, 4, 5, 6$ ・・**5 点**

である。また，3頂点の組合せは A_1, A_3, A_5 と A_2, A_4, A_6 の2通り，その各々について 2, 3, 4 回目の目の出方は $3!$ 通り存在する。よって，合計で

$4\cdot 2\cdot 3!$ 通り

である。

以上, [1], [2], [3]より，求める確率は

$$\frac{2\cdot 6\cdot 3!+3\cdot 6\cdot 2\cdot 3!+4\cdot 2\cdot 3!}{6^4}=\frac{7}{27}$$

である。

(答) $\frac{7}{27}$

$4\cdot 2\cdot 3!(=48)$ **通り**

・・**5 点**

答・・5 点