# ２０２３年　第２回一橋大本番レベル模試・数学

# 解答・解説・採点基準

**全５問　１２０分　２５０点満点**

## Ｉ （５０点）

$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ より，$0<\theta<2\theta<3\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。したがって，

$$0<\cos 3\theta<\cos 2\theta<\cos\theta<1$$

が成り立つ。よって，3辺の長さが $\cos\theta,\ \cos 2\theta,\ \cos 3\theta$ である直角三角形の成立条件は，

$$\cos^2\theta=\cos^2 2\theta+\cos^2 3\theta \quad \cdots ①$$

である。和と積の公式，2倍角の公式を用いて①を解くと，

$$\begin{aligned}
&\cos^2\theta=\cos^2 2\theta+\cos^2 3\theta\\
&\Leftrightarrow \left(\cos^2 3\theta-\cos^2\theta\right)+\cos^2 2\theta=0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos 3\theta+\cos\theta\right)\left(\cos 3\theta-\cos\theta\right)+\cos^2 2\theta=0\\
&\Leftrightarrow \left(2\cos 2\theta\cos\theta\right)\left(-2\sin 2\theta\sin\theta\right)+\cos^2 2\theta=0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos 2\theta-2\sin 2\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\right)\cos 2\theta=0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos 2\theta-2\sin^2 2\theta\right)\cos 2\theta=0\\
&\Leftrightarrow \left\{\cos 2\theta-2\left(1-\cos^2 2\theta\right)\right\}\cos 2\theta=0\\
&\Leftrightarrow \left(2\cos^2 2\theta+\cos 2\theta-2\right)\cos 2\theta=0\\
&\therefore \cos 2\theta=0,\ \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}
\end{aligned}$$

となる。$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\dfrac{1}{2}<\cos 2\theta<1$ であるから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ かつ①を満たすのは

$$\cos 2\theta=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

のみである。

**50 点**

**1辺の長さが $\cos\theta$ の辺が最長辺になることを述べて‥10 点**

**①式（$\cos\theta$，$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ 間で成り立つ関係式）‥15 点**

**①を満たす $\cos 2\theta$ の値‥10 点**

**（$\cos\theta,\ \cos 3\theta$ の値などでも可）**

(答)　$\cos 2\theta = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$

答‥15点

[別解]

[別解]　50点

(①までは本解と同様)

本解と同様‥25点

2倍角の公式と3倍角の公式より，①は，

$$\cos^2\theta = \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\theta = \left(2\cos^2\theta - 1\right)^2 + \left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)^3$$
$$\Leftrightarrow 16\cos^6\theta - 20\cos^4\theta + 4\cos^2\theta + 1 = 0$$

となる。ここで，$\cos^2\theta = t$ とおくと，

$$16t^3 - 20t^2 + 4t + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2t-1)\left(8t^2 - 6t - 1\right) = 0$$
$$\therefore t = \frac{1}{2},\ \frac{3\pm\sqrt{17}}{8}$$

①を満たす $\cos^2\theta$ の値‥10点

($\cos 2\theta,\ \cos 3\theta$ の値などでも可)

となる。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$ より，

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\theta < 1$$
$$\therefore \frac{3}{4} < t < 1$$

であることとあわせると，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$ かつ①を満たす $t$ の値は

$t = \dfrac{3+\sqrt{17}}{8}$ となる。したがって，半角の公式より，

$$t = \frac{3+\sqrt{17}}{8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) = \frac{3+\sqrt{17}}{8}$$
$$\Leftrightarrow \cos 2\theta = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

が求める値となる。

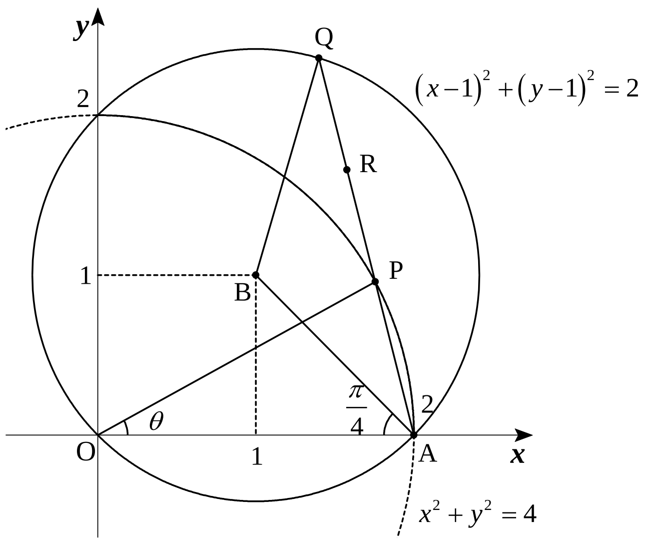
(答)　$\cos 2\theta = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$

答‥15点

# $\boxed{2}$ （５０点）

(1)

(1)　15 点




点 A, B, P, Q, R は上図のようになる。$\mathrm{OA}=\mathrm{OP}$ より $\angle\mathrm{OAP}=\dfrac{\pi-\theta}{2}$

$\angle\mathrm{OAP}$・・5 点

であるから，

$$\angle\mathrm{BAQ}=\frac{\pi-\theta}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi-2\theta}{4}\left(\because \angle\mathrm{OAB}=\frac{\pi}{4}\right)$$

$\angle\mathrm{BAQ}$・・5 点

であり，これと $\mathrm{AB}=\mathrm{QB}$ より

$$\angle\mathrm{ABQ}=\pi-2\cdot\frac{\pi-2\theta}{4}=\frac{\pi}{2}+\theta$$

となる。

(答)　$\angle\mathrm{ABQ}=\dfrac{\pi}{2}+\theta$

答・・5 点

(2)

(2)　15 点

P の座標は $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ である。また，点 B を通り $x$ 軸に平行な直線と，円の一部である $x^2+y^2=4$ $(x>0,\ y>0)$ との交点を点 C とおいたとき，平行線の錯角の関係から $\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{ABC}$ である。

P の座標・・5 点

このことと(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ のなす角は $\angle\mathrm{ABQ}-\angle\mathrm{OAB}=\theta+\dfrac{\pi}{4}$

となり，Q の座標は

$$\left(1+\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\ 1+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\therefore \left(1+\cos\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta+\sin\theta\right)$$

Qの座標‥5点

となる。したがって，線分PQの中点Rの座標は

$$\left(\frac{2\cos\theta+(1+\cos\theta-\sin\theta)}{2},\ \frac{2\sin\theta+(1+\cos\theta+\sin\theta)}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{1+3\cos\theta-\sin\theta}{2},\ \frac{1+\cos\theta+3\sin\theta}{2}\right)$$

となる。

(答) $\left(\frac{1+3\cos\theta-\sin\theta}{2},\ \frac{1+\cos\theta+3\sin\theta}{2}\right)$

答‥5点

(3)

(3)　20点

Rの座標を $(x,\ y)$ とおくと，

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+3\cos\theta-\sin\theta}{2} \\ y=\dfrac{1+\cos\theta+3\sin\theta}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\cos\theta-\sin\theta=2x-1 \\ \cos\theta+3\sin\theta=2y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta=\dfrac{3x+y-2}{5} \\ \sin\theta=\dfrac{-x+3y-1}{5} \end{cases}$$

$\cos\theta,\ \sin\theta$ を $x,\ y$ で表す‥5点(完答)

となる。よって，

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3x+y-2}{5}\right)^2+\left(\frac{-x+3y-1}{5}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$ ‥5点

となる。また，$\theta$ のとりうる値の範囲は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$\cos\theta>0 \text{ かつ } \sin\theta>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+y-2}{5}>0 \text{ かつ } \frac{-x+3y-1}{5}>0$$

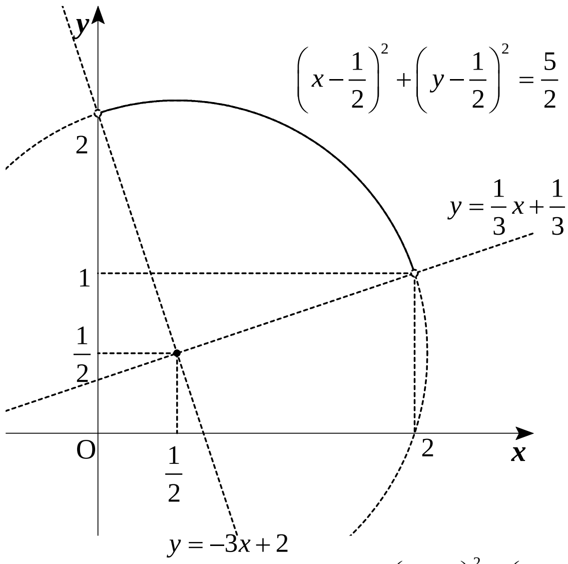
$y>-3x+2$ かつ $y>\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ ‥5点

$\Leftrightarrow y > -3x+2$ かつ $y > \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

となる。したがって，求める軌跡は円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$ の

$y > -3x+2$ かつ $y > \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ を満たす部分である。これを図示する

と，下図の実線部分となる。ただし，端点を含まない。




図・・5 点

(答) 円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$ の

$y > -3x+2$ かつ $y > \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ を満たす部分

前図の実線部分(ただし，端点を含まない)

## $\boxed{3}$ （５０点）

(1)

**(1)　25 点**

$f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2$ とすると，

$$f'(x)=4x^3+3\alpha x^2+2\beta x$$

**$f'(x)$・・5 点**

となる。$f'(x)$ は実数係数の 3 次関数であるから，$f'(x)=0$ の相異なる実数解の個数は 1, 2, 3 のいずれかである。

[1]　$f'(x)=0$ がただ 1 つの実数解をもつとき

その実数解の前後で $f'(x)$ の符号が変化するから，$y=f(x)$ は 1 つの極値をもつ。

[2]　$f'(x)=0$ が相異なる 2 つの実数解をもつとき

$f'(x)=0$ は重解と重解ではない実数解を 1 つずつもつ。このとき，重解の前後で $f'(x)$ の符号は変化せず，重解ではない実数解の前後で $f'(x)$ の符号は変化するから，$y=f(x)$ は 1 つの極値をもつ。

[3]　$f'(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつとき

3 つの実数解すべてにおいて，その前後で $f'(x)$ の符号が変化するから，$y=f(x)$ は 3 つの極値をもつ。

以上, [1], [2], [3]より，$C$ がただ 1 つの極値をもつことは，

$f'(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもたない　・・・①

**①・・5 点**

ことと同値である。ここで，

$$f'(x)=x\left(4x^2+3\alpha x+2\beta\right)$$

より，$x=0$ は $f'(x)=0$ の実数解の 1 つである。したがって，

$4x^2+3\alpha x+2\beta=0$ が $x=0$ を解にもつ　・・・②

$4x^2+3\alpha x+2\beta=0$ の判別式 $D$ に対して $D$† $0$ が成り立つ　・・・③

としたとき，①は「②または③」と同値である。ここで，②は

**②または③・・5 点**

$$4\cdot 0^2+3\alpha\cdot 0+2\beta=0$$
$$\Leftrightarrow \beta=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha^2}=0$$

**$\dfrac{\beta}{\alpha^2}=0$・・5 点**

と同値である。また，③は

$D \dagger 0$

$\Leftrightarrow 9\alpha^2 - 32\beta \dagger 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{32} \dagger \dfrac{\beta}{\alpha^2}$

と同値である。以上のことから，$C$ がただ1つの極値をもつ $\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ の値の範囲は，

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = 0 \text{ または } \frac{9}{32} \dagger \frac{\beta}{\alpha^2}$$

である。

(答) $\dfrac{\beta}{\alpha^2} = 0$ または $\dfrac{9}{32} \dagger \dfrac{\beta}{\alpha^2}$

(2)

曲線 $C$ の接線は $y$ 軸に平行ではないので，ある実数 $s,\ t,\ a,\ b\ (s \neq t)$ に対して，直線 $y = ax + b$ が曲線 $y = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2$ に $x = s,\ t$ で接すると考えれば，異なる 2 点で $C$ と接するような直線が存在することは，

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 = (x-s)^2 (x-t)^2 + ax + b$$

と表せることと同値である。係数比較により，これは

$$\alpha = -2(s+t)$$
$$\beta = (s+t)^2 + 2st$$

と表せることと同値である。したがって，$s + t \neq 0 \left(\because s + t = -\dfrac{\alpha}{2}\right)$ のもとで，

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{st}{(s+t)^2}$$

の値の範囲を求めればよい。ここで，$x$ についての方程式 $x^2 - (s+t)x + st = 0$ の解が $x = s,\ t$ であることより，

$s,\ t$ が $s \neq t$ を満たす実数である

$\Leftrightarrow x^2 - (s+t)x + st = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつ

$\Leftrightarrow x^2 - (s+t)x + st = 0$ の判別式が正

$\Leftrightarrow (s+t)^2 - 4st > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{st}{(s+t)^2} < \dfrac{1}{4}\ (\because s + t \neq 0)$

$\dfrac{9}{32} \dagger \dfrac{\beta}{\alpha^2}$ ‥5 点

(2)　25 点

**接点と接線を文字で設定する‥5 点**

**$\alpha,\ \beta$ を $s,\ t$ で表す‥5 点(完答)**

$x^2 - (s+t)x + st = 0$ **の判別式が正‥5 点**

$\dfrac{st}{(s+t)^2} < \dfrac{1}{4}$ ‥5 点

| | |
|---|---|
| が成立する。以上のことから，異なる2点で$C$と接するような直線が存在する$\dfrac{\beta}{\alpha^2}$の値の範囲は$\dfrac{\beta}{\alpha^2}<\dfrac{3}{8}$である。<br><br>(答) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}<\dfrac{3}{8}$ | 答‥5点 |
| (2)[別解] | (2)[別解]　25点 |
| $f'(x)=4x^3+3\alpha x^2+2\beta x$より，曲線$C$の$x=p$における接線は，<br>$y=f'(p)(x-p)+f(p)$<br>$\Leftrightarrow y=(4p^3+3\alpha p^2+2\beta p)(x-p)+p^4+\alpha p^3+\beta p^2$<br>と表される。ここで， | $x=p$における接線の方程式‥5点 |
| $x^4+\alpha x^3+\beta x^2-\{(4p^3+3\alpha p^2+2\beta p)(x-p)+p^4+\alpha p^3+\beta p^2\}=0$<br>$\Leftrightarrow (x^4-p^4)+\alpha(x^3-p^3)+\beta(x^2-p^2)-(4p^3+3\alpha p^2+2\beta p)(x-p)=0$<br>$\Leftrightarrow (x-p)\{x^3+(p+\alpha)x^2+(p^2+\alpha p+\beta)x-3p^3-2\alpha p^2-\beta p\}=0$<br>$\Leftrightarrow (x-p)^2\{x^2+(2p+\alpha)x+3p^2+2\alpha p+\beta\}=0$ | |
| より，異なる2点で$C$と接するような直線が存在することは，<br>$x^2+(2p+\alpha)x+3p^2+2\alpha p+\beta=0$　・・・④<br>が$x=p$でない重解をもつような$p$が存在することと同値である。 | ④が$x\neq p$で重解をもつ‥5点 |
| ここで，方程式④の判別式を$D_1$とおくと，<br>$D_1=0$<br>$\Leftrightarrow (2p+\alpha)^2-12p^2-8\alpha p-4\beta=0$<br>$\Leftrightarrow -8p^2-4p\alpha+\alpha^2-4\beta=0$　・・・⑤ | ⑤‥5点 |
| である。また，④が$x=x_0$を重解にもつとき，解と係数の関係より，<br>$x_0+x_0=-(2p+\alpha)$<br>$\therefore x_0=-p-\dfrac{\alpha}{2}$ | $x_0=-p-\dfrac{\alpha}{2}$‥5点 |
| であるから，<br>④が$x=p$でない重解をもつような$p$が存在する<br>$\Leftrightarrow D_1=0$かつ$x_0\neq p$となる$p$が存在する | |

$\Leftrightarrow$ ⑤かつ $-p-\dfrac{\alpha}{2}\neq p$ となる $p$ が存在する

$\Leftrightarrow -8p^2-4p\alpha+\alpha^2-4\beta=0$ かつ $p+\dfrac{\alpha}{4}\neq 0$ となる $p$ が存在する

$\Leftrightarrow -8\left(p+\dfrac{\alpha}{4}\right)^2+\dfrac{3}{2}\alpha^2-4\beta=0$ かつ $p+\dfrac{\alpha}{4}\neq 0$ となる $p$ が存在する

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\alpha^2-4\beta>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\beta}{\alpha^2}<\dfrac{3}{8}$

となる。よって，異なる 2 点で $C$ と接するような直線が存在する $\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ の値の範囲は $\dfrac{\beta}{\alpha^2}<\dfrac{3}{8}$ である。

(答) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}<\dfrac{3}{8}$

答‥5 点

# $\boxed{4}$ （５０点）

(1)

$n$ は3以下の正の整数であるから，$n$ で場合分けする。

[1]　$n=1$ のとき

${}_m\mathrm{C}_1=m$ より，$(m,\ n)=(2024,\ 1)$ のときのみ条件を満たす。

[2]　$n=2$ のとき

${}_m\mathrm{C}_2=\dfrac{m(m-1)}{2}$ であり，$m$ ‡ 2 より $\dfrac{m(m-1)}{2}$ は単調に増加する。これと $\dfrac{64\cdot 63}{2}=2016<2024<2080=\dfrac{65\cdot 64}{2}$ より，条件を満たす $(m,\ n)$ の組は存在しない。

[3]　$n=3$ のとき

${}_m\mathrm{C}_3=\dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}$ であり，$m$ ‡ 3 より $\dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}$ は単調に増加する。これと $\dfrac{24\cdot 23\cdot 22}{6}=2024$ より，

$(m,\ n)=(24,\ 3)$ のときのみ条件を満たす。

以上, [1], [2], [3]より，条件を満たす $(m,\ n)$ の組は

$(m,\ n)=(2024,\ 1),\ (24,\ 3)$ である。

(答)　$(m,\ n)=(2024,\ 1),\ (24,\ 3)$

(1)[別解]

(場合分け[1]までは本解と共通)

[2]　$n=2$ のとき

$$
\begin{aligned}
&{}_m\mathrm{C}_2=2024\\
\Leftrightarrow\ &\frac{m(m-1)}{2}=2024\\
\Leftrightarrow\ &m^2-m-4048=0\\
\therefore\ &m=\frac{1\pm\sqrt{16193}}{2}
\end{aligned}
$$

である。ここで，$127^2=16129<16193<16384=128^2$ より

**(1)　20点**

**[1]のとき**

$(m,\ n)=(2024,\ 1)$

**‥5点**

**${}_m\mathrm{C}_2$ は単調に増加する‥5点**

**[2]のとき条件を満たさない‥5点**

**[3]のとき**

$(m,\ n)=(24,\ 3)$

**‥5点**

**(1)[別解]　20点**

**本解と共通‥5点**

$m=\dfrac{1\pm\sqrt{16193}}{2}$

**‥5点**

$\sqrt{16193}$ は整数とならないから，$m=\dfrac{1\pm\sqrt{16193}}{2}$ も整数となら

ず，条件を満たす $(m,\ n)$ の組は存在しない。

**[2]のとき条件を満たさない‥5 点**

[3]　$n=3$ のとき

$$
\begin{aligned}
&{}_m\mathrm{C}_3=2024\\
&\Leftrightarrow \frac{m(m-1)(m-2)}{6}=2024\\
&\Leftrightarrow m^3-3m^2+2m-12144=0\\
&\Leftrightarrow (m-24)(m^2+21m+506)=0\\
&\therefore m=24\ (\because m^2+21m+506>0)
\end{aligned}
$$

である。よって，$(m,\ n)=(24,\ 3)$ のときのみ条件を満たす。

**[3]のとき**

**$(m,\ n)=(24,\ 3)$**

**‥5 点**

以上, [1], [2], [3]より，条件を満たす $(m,\ n)$ の組は

$(m,\ n)=(2024,\ 1),\ (24,\ 3)$ である。

(答)　$(m,\ n)=(2024,\ 1),\ (24,\ 3)$

(2)

**(2)　15 点**

$n \ddagger 4$ のとき，

$$
{}_m\mathrm{C}_n=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{m-n+1}{n}
$$

**${}_m\mathrm{C}_n$ を左式のように表して‥5 点**

であり，$m \ddagger \boldsymbol{2}n$ より $m-n+1 \ddagger n+1>n$ であるから，$n \ddagger 5$ のとき

$$
\begin{cases}
m-n+1>n\\
m-n+2>n-1\\
\quad\vdots\\
m-4>5
\end{cases}
$$

$$
\therefore
\begin{cases}
\dfrac{m-n+1}{n}>1\\
\dfrac{m-n+2}{n-1}>1\\
\quad\vdots\\
\dfrac{m-4}{5}>1
\end{cases}
$$

**$\begin{cases} m-n+1>n\\ m-n+2>n-1\\ \quad\vdots\\ m-4>5 \end{cases}$**

**‥5 点**

となる。以上のことから，$m \ddagger \boldsymbol{2}n$ かつ $n \ddagger 4$ のとき

$$
{}_m\mathrm{C}_n \ddagger \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}={}_m\mathrm{C}_4
$$

が成り立つ。

(証明終)

**証明終‥5 点**

(2)[別解]

**(2)[別解]　15 点**

数学的帰納法を用いて，$m \ddagger 2n$ かつ $n \ddagger 4$ のとき

$${}_m\mathrm{C}_n \ddagger {}_m\mathrm{C}_4$$

が成り立つことを示す。

[1] $m \ddagger 2n$ かつ $n=4$ のとき

${}_m\mathrm{C}_n = {}_m\mathrm{C}_4$ より，${}_m\mathrm{C}_n \ddagger {}_m\mathrm{C}_4$ が成り立つ。

[2] $m \ddagger 2n$ かつ $n=k$ ($k$ は 4 以上の自然数)のとき

${}_m\mathrm{C}_n \ddagger {}_m\mathrm{C}_4$ が成り立つと仮定する。$m \ddagger 2n$ かつ $n=k+1$ のとき，$m \ddagger 2(k+1) > 2k$ より ${}_m\mathrm{C}_k \ddagger {}_m\mathrm{C}_4$ が成り立つから，

$$\begin{aligned}
{}_m\mathrm{C}_{k+1} &= \frac{m!}{(k+1)!\cdot(m-k-1)!} \\
&= \frac{m!}{k!\cdot(m-k)!}\cdot\frac{m-k}{k+1} \\
&= {}_m\mathrm{C}_k \cdot \frac{m-k}{k+1} \\
&\ddagger {}_m\mathrm{C}_4 \cdot \frac{m-k}{k+1} \quad (\because {}_m\mathrm{C}_k \ddagger {}_m\mathrm{C}_4) \\
&\ddagger {}_m\mathrm{C}_4 \cdot \frac{k+2}{k+1} \quad (\because m \ddagger 2(k+1)) \\
&> {}_m\mathrm{C}_4
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって，$m \ddagger 2n$ かつ $n=k+1$ のときも ${}_m\mathrm{C}_n \ddagger {}_m\mathrm{C}_4$ が成り立つ。

以上, [1], [2]より，$m \ddagger 2n$ かつ $n \ddagger 4$ のとき ${}_m\mathrm{C}_n \ddagger {}_m\mathrm{C}_4$ が成り立つ。

(証明終)

${}_m\mathrm{C}_{k+1} = {}_m\mathrm{C}_k \cdot \dfrac{m-k}{k+1}$ ‥5 点

${}_m\mathrm{C}_k \ddagger {}_m\mathrm{C}_4$ **ならば** ${}_m\mathrm{C}_{k+1} \ddagger {}_m\mathrm{C}_4$ **となることを示して** ‥5 点

**証明終‥5 点**

(3)

**(3) 15 点**

$$\begin{aligned}
&{}_m\mathrm{C}_n = 2024 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!} = 2^3\cdot 11\cdot 23 \\
\therefore\ &m! = 2^3\cdot 11\cdot 23\cdot n!\cdot(m-n)!
\end{aligned}$$

のとき，$2^3\cdot 11\cdot 23\cdot n!\cdot(m-n)!$ は 23 の倍数であるから，$m!$ も 23 の倍数となる。よって，23 は素数であるから $m \ddagger 23$ が必要である。

$m!$ **が** 23 **の倍数** ‥5 点

$m \ddagger 23$ ‥5 点

ここで，$m \ddagger 23$ のとき

$${}_m\mathrm{C}_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}$$

は単調に増加するから, (2)の結果とあわせて

$${}_m\mathrm{C}_n \ddagger {}_m\mathrm{C}_4 \ddagger {}_{23}\mathrm{C}_4 = 8855 > 2024$$

となり，${}_m\mathrm{C}_n = 2024$ を満たさない。したがって，条件を満たす

$(m, n)$ の組は存在しない。

(証明終)

**証明終・・5 点**

## 5 （５０点）

## 【解答・採点基準】

(1)

Ｐが O の位置にある状態を $X$，A または D の位置にある状態を $Y$，B または C の位置にある状態を $Z$ とおく。Ｐの初期位置，[操作]および五角錐の対称性から，Ｐが A の位置にある確率と D の位置にある確率は等しく $q_n$ であり，また，Ｐが B の位置にある確率と C の位置にある確率は等しく $r_n$ である。よって，$n$ 回の[操作]のあとに状態 $X, Y, Z$ である確率はそれぞれ $p_n,\ 2q_n,\ 2r_n$ となり，

$$p_n + 2q_n + 2r_n = 1 \qquad \cdots ①$$

が成り立つ。ここで，1回の[操作]で表がでたときの移動における状態遷移とその確率は次のようになる。

| | | 移動後 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $X$ | $Y$ | $Z$ |
| 移動前 | $X$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | $Y$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| | $Z$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

したがって，1回の[操作]における状態遷移とその確率は次のようになる。

(1)　25 点

Ｐが C, D の位置にある確率はそれぞれ $r_n,\ q_n$ ‥5 点(完答)

$p_n + 2q_n + 2r_n = 1$ ‥5 点

| | | [操作]後 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $X$ | $Y$ | $Z$ |
| [操作]前 | $X$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| | $Y$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| | $Z$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{3}$ |

上表より，$n+1$ 回目の[操作]のあとに状態 $Z$ に遷移する確率を考えると，

$$2r_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{4}\cdot 2q_n+\frac{2}{3}\cdot 2r_n$$
$$\Leftrightarrow r_{n+1}=\frac{1}{8}\left(p_n+2q_n\right)+\frac{2}{3}r_n$$

$r_n$ の確率漸化式を立てて‥5点
($p_n$, $q_n$ などを含んでいても可)

$$\Leftrightarrow r_{n+1}=\frac{1}{8}(1-2r_n)+\frac{2}{3}r_n \quad (\because ①)$$
$$\Leftrightarrow r_{n+1}=\frac{5}{12}r_n+\frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow r_{n+1}-\frac{3}{14}=\frac{5}{12}\left(r_n-\frac{3}{14}\right)$$

$r_{n+1}$, $r_n$ 間で成り立つ関係式‥5点

を得る。したがって，数列 $\left\{r_n-\frac{3}{14}\right\}$ は公比 $\frac{5}{12}$，初項

$$r_1-\frac{3}{14}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{14}=-\frac{5}{56}$$

の等比数列であるから，

$$r_n-\frac{3}{14}=\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}\cdot\left(-\frac{5}{56}\right)$$
$$\therefore r_n=\frac{3}{14}\left\{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n\right\}$$

となる。

(答) $r_n=\frac{3}{14}\left\{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n\right\}$

答‥5点

(2)

(2)　20点

(1)の 2 つ目の表より，$n+1$ 回目の[操作]のあとに状態 $X, Y$ に遷移する確率をそれぞれ考えると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}\cdot 2q_n+\frac{1}{6}\cdot 2r_n$$
$$2q_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}\cdot 2q_n+\frac{1}{6}\cdot 2r_n$$

が得られる。ここで，上式を辺々引くことで

$$p_{n+1}-2q_{n+1}=\frac{1}{4}\left(p_n-2q_n\right)$$

を得る。したがって，数列 $\{p_n-2q_n\}$ は公比 $\frac{1}{4}$，初項

$$p_1-2q_1=\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

の等比数列であるから

$$p_n-2q_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

となる。

(答)　$p_n-2q_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$p_n, q_n$ **の確率漸化式を立てて**

**‥10 点(各 5 点×2)**

$p_{n+1}-2q_{n+1}$, $p_n-2q_n$ **間で成り立つ関係式**

**‥5 点**

**答‥5 点**

(3)

**(3)　5 点**

(1)の結果より $2r_n=\frac{3}{7}\left\{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n\right\}$ であり，(2)の結果より

$2q_n=p_n-\left(\frac{1}{4}\right)^n$ である。したがって，①より，

$$p_n+2q_n+2r_n=1$$
$$\Leftrightarrow p_n+\left\{p_n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}+\frac{3}{7}\left\{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n\right\}=1$$
$$\therefore p_n=\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(\frac{5}{12}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

を得る。

(答)　$p_n=\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(\frac{5}{12}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

**答‥5 点**

# ２０２３年　第二回　一橋大学本番レベル模試
# ソーシャルデータサイエンス・総合問題
# 解答・解説・採点基準

### 全３問　６０分　１００点満点

## Ｉ　（４０点）

### 【解答・採点基準】

| | |
|---|---|
| 問 1　0.019 | 問 1　6 点 |
| 問 2　問 1 の結果より，実際は病気にかかっていない人の方が病気にかかっている人に比べて圧倒的に多い。よって不適切な政策であると考えられる。 | 問 2　14 点<br>＊条件つき確率の値から陽性と判定されて実際は病気にかかっていない人が圧倒的に多いことに言及して 9 点<br><br>＊不適切な政策であることに言及して 5 点 |
| 問 3　料理 A を食べたという条件のもとで食中毒になる確率 : 0.60<br><br>料理 A を食べていないという条件のもとで食中毒になる確率 : 0.40<br><br>料理 B を食べたという条件のもとで食中毒になる確率 : 0.71<br><br>料理 B を食べていないという条件のもとで食中毒になる確率 : 0.31 | 問 3　8 点<br>各 2 点×4 |
| 問 4　料理 A を食べた人と食べなかった人とで | 問 4　12 点 |

食中毒になる確率の差は，

　0.60 - 0.40 = 0.20

であるのに対し，料理 B を食べた人と食べなかった人とで食中毒になる確率の差は，

　0.71 - 0.31 = 0.40

であるので，料理 B が食中毒の原因としてより可能性が高いと考えられる。

＊各料理の食中毒になる確率の差を求めて各４点×2

＊料理 B の方が可能性が高いことに言及して４点

**2** （３０点）

## 【解答・採点基準】

| 解答 | 採点基準 |
|---|---|
| 問 1　指標 A：全ての商品 X のうち，センサで正しく判別することができた商品 X の割合。<br>指標 P：センサで不良品と判別された商品 X のうち，実際に不良品であった商品 X の割合。<br>指標 R：実際に不良品であった商品 X のうち，センサで不良品と判別された商品 X の割合。 | 問 1　9 点(各 3 点×3)<br>＊下線部の内容で各 3 点。 |
| 問 2　A：0.53<br>B：0.50<br>C：0.46 | 問 2　9 点(各 3 点×3) |
| 問 3　指標 P と指標 R の間にはトレードオフの関係がある。 | 問 3　6 点 |
| 問 4　指標：指標 R<br>検査法：検査法 A | 問 4　6 点(完答) |

**問 3**

＊「指標 P と指標 R の間にはトレードオフの関係(一方が大きくなると，もう一方が小さくなる関係)がある」という内容で 6 点。

## 3 （３０点）

【解答・採点基準】

| | |
|---|---|
| 問 1 | B，C |
| 問 2 | が：0.032　　展示：0.130 |
| 問 3 | 0.0625 |

| | |
|---|---|
| 問 1 | 10 点(完答) |
| 問 2 | 各 5 点　計 10 点 |
| 問 3 | 10 点 |