２０２４年　第一回一橋大本番レベル模試・数学

解答・解説・採点基準

全５問　１２０分　２５０点満点

Ⅰ　（５０点）

(1)

２進法で表すと各位の数の和が２となる正の整数のうち $n+1\,(n \geqq 1)$ 桁の数は全部で n 個あり，これらを小さいものから順に並べると，以下のようになる。

$$\underbrace{100\cdots\cdots01}_{n\text{桁}}{}_{(2)},\ \underbrace{100\cdots\cdots10}_{n\text{桁}}{}_{(2)},\ \cdots\cdots,\ \underbrace{110\cdots\cdots00}_{n\text{桁}}{}_{(2)}$$

これより，a_n を小さいものから順に並べると，２進法で２桁の数が１個，３桁の数が２個，４桁の数が３個，……の順で並ぶ。また，ここで $50=(1+2+\cdots\cdots+9)+5$ より，a_{50} は２進法で11桁の数のうち５番目に小さい数である。したがって，a_{50} は２進法で表すと $10000010000_{(2)}$ となり，10進法で表すと

$$2^{10}+2^4=1024+16=1040 \quad \cdot\cdot\cdot(\text{答})$$

である。

(2)

まず，２進法で表すと10桁以下かつ各位の数の和が２となる正の整数の和，つまり $\sum_{n=1}^{45} a_n\,(=T)$ を考える。２進法で $n+1\,(1 \leqq n \leqq 9)$ 桁かつ各位の数の和が２となる正の整数を小さいものから順に並べて10進法で表すと

$$2^n+1,\ 2^n+2^1,\ 2^n+2^2,\ \cdots\cdots,\ 2^n+2^{n-1}$$

となり，これらの和は

(1)　20点

条件を満たす $n+1\,(n \geqq 1)$ 桁の数は全部で n 個‥5点

a_{50} は条件を満たす11桁の数で５番目に小さい‥5点

答‥10点

・２進法で答えていたら５点

(2)　30点

$$\left(2^n+1\right)+\left(2^n+2^1\right)+\left(2^n+2^2\right)+\cdots\cdots+\left(2^n+2^{n-1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(2^n+2^{k-1}\right)$$
$$=2^n n+\frac{2^n-1}{2-1}$$
$$=2^n\left(n+1\right)-1$$

であり，これより $T=\sum_{n=1}^{9}\left\{2^n\left(n+1\right)-1\right\}$ と表せる。ここで

$$T=2\cdot 2+2^2\cdot 3+\cdots\cdots+2^9\cdot 10-9$$
$$2T=2^2\cdot 2+2^3\cdot 3+\cdots\cdots+2^{10}\cdot 10-18$$

となる。上の 2 式について両辺それぞれの差をとると

$$-T=4+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^9-2^{10}\cdot 10+9$$
$$\Leftrightarrow T=2^{10}\cdot 10-4-4\cdot\frac{2^8-1}{2-1}-9=2^{10}\cdot 9-9=9207$$

と求められる。よって

$$\sum_{n=1}^{50}a_n=T+a_{46}+a_{47}+a_{48}+a_{49}+a_{50}$$
$$=9207+\left(2^{10}+1\right)+\left(2^{10}+2\right)+\left(2^{10}+4\right)+\left(2^{10}+8\right)+\left(2^{10}+16\right)$$
$$=9207+5\cdot 1024+31$$
$$=14358 \qquad \cdots(答)$$

と求められる。

(2)[別解]

l, m を正の整数とする。$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{45}$ のうち，2 進法で表すと下から l 桁目 $\left(1\leqq l\leqq 10\right)$ が 1 となる数は，l 桁目と m 桁目 $\left(1\leqq m\leqq 10\right.$ かつ $\left.l\neq m\right)$ が 1 で他の桁がすべて 0 となる数であるから，9 通り考えられる。つまり，$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{45}$ をすべて 2^X+2^Y (X, Y は相異なる 0 以上の整数)の形で表すと，2^{l-1} が含まれる項は l の値によらず 9 個ある。これより，$T=\sum_{n=1}^{45}a_n$ は

$$T=\sum_{l=1}^{10}2^{l-1}\cdot 9=\frac{2^{10}-1}{2-1}\cdot 9=9207$$

と求められる。よって

$n+1\left(1\leqq n\leqq 9\right)$ 桁かつ各位の数の和が 2 となる正の整数の総和が $2^n\left(n+1\right)-1$ ・・10 点

$T=9207$ ・・10 点

答・・10 点

(2)[別解]　30 点

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{45}$ のうち，2 進法で表すと $l\left(1\leqq l\leqq 10\right)$ 桁目が 1 となる数が 9 通り・・10 点

$T=9207$ ・・10 点

$$\sum_{n=1}^{50} a_n = T + a_{46} + a_{47} + a_{48} + a_{49} + a_{50}$$

$$= 9207 + \left(2^{10}+1\right) + \left(2^{10}+2\right) + \left(2^{10}+4\right) + \left(2^{10}+8\right) + \left(2^{10}+16\right)$$

$$= 9207 + 5 \cdot 1024 + 31$$

$$= 14358$$ ・・・(答)

と求められる。

答・・10 点

2 （５０点）

$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ を満たすように点 C をとると，

$$\begin{aligned}&\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}\right)=0\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{aligned}$$

であり，$\left|\overrightarrow{OP}\right|=0$ または $\left|\overrightarrow{CP}\right|=0$ または $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{CP}$ であるから，P は線分 OC を直径とする円周上を動く。ここで，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OC}\right|^2&=\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right|^2\\&=\frac{4}{9}\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\\&=16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\\&=36\end{aligned}$$

より，$\left|\overrightarrow{OC}\right|=4,\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$ である。したがって，線分 OC の中点を D とすると，$\left|\overrightarrow{DP}\right|$ は P が動く円周の半径となるから，$\left|\overrightarrow{DP}\right|=2$ である。よって，$\overrightarrow{DP}$ と $\overrightarrow{AB}$ のなす角を $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\pi\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}&=\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}\right)\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\left|\overrightarrow{DP}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\theta\\&=-6+12\cos\theta\end{aligned}$$

であり，θ は $0\leqq\theta\leqq\pi$ で任意の値をとりうるから，

$$-6-12\leqq\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\leqq-6+12$$

50 点

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$ ・・10 点

P は線分 OC を直径とする円周上を動く・・10 点

$\left|\overrightarrow{DP}\right|=2$ ・・10 点

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=-6+12\cos\theta$
・・10 点

$\therefore -18 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \leqq 6$　　・・・(答)

である。

答・・10 点

[別解]

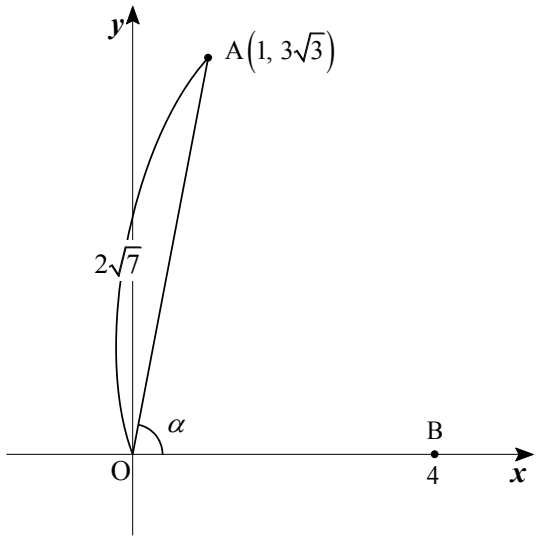
［別解］ 50 点

$\angle \mathrm{AOB} = \alpha \ (0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ とおくと，

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\therefore \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \ (\because 0 \leqq \alpha \leqq \pi)$$

より，次図のように $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}\left(1,\ 3\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$ となるように xy 平面をとることができる。



O, A, B を xy 平面上に置く・・10 点

ここで，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{2}{3}\left(x + 3\sqrt{3}y\right) + \frac{1}{3} \cdot 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 2\sqrt{3}y$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 4$$

より，P は $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$ を中心とする半径 2 の円周上を動く。また，

P は $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$ を中心とする半径 2 の円周上を動く・・20 点

（中心に 10 点，半径に 10 点）

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = k$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\Leftrightarrow k = 4x - \left(x + 3\sqrt{3}y\right)$$

$$\Leftrightarrow -3x + 3\sqrt{3}y + k = 0$$

となる。直線 $-3x+3\sqrt{3}y+k=0$ と P が動く円周は共有点をもつから，点と直線の距離の公式より

$$\frac{\left|-3\cdot 1+3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+k\right|}{\sqrt{(-3)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}}\leqq 2$$

$$\Leftrightarrow |k+6|\leqq 12$$

$$\Leftrightarrow -18\leqq k\leqq 6$$

となり，求める範囲は

$$-18\leqq \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\leqq 6 \qquad \cdots(答)$$

である。

$-3x+3\sqrt{3}y+k=0$

・・10 点

答・・10 点

3 （５０点）

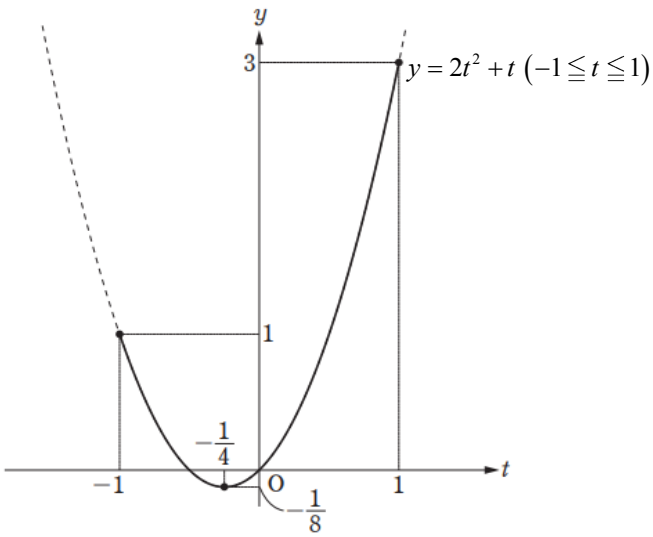
【解答・採点基準】

(1)

$t=\sin\theta$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-1\leqq t\leqq 1$ である。与式は $2t^2+t-a=0$ となる。ここで，$2t^2+t-a=0$ の実数解 t は，曲線 $y=2t^2+t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ と直線 $y=a$ の共有点の t 座標に等しい。

$$\begin{aligned} y&=2t^2+t \\ &=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8} \end{aligned}$$

より，$y=2t^2+t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ のグラフは以下のようになる。



また，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$t=\pm1$ のとき t に対して θ は 1 個対応し，$-1<t<1$ のとき t に対して θ は 2 個対応する。したがって，$2\sin^2\theta+\sin\theta-a=0$ を満たす θ の個数は以下のようになる。

(1)　20 点

$y=2t^2+t$ と $y=a$ の共有点を求める方針に帰着‥5 点

$y=2t^2+t$ のグラフ‥5 点

・頂点の y 座標と $t=\pm1$ のときの y 座標がないものは 1 つにつき 1 点減点

t に対応する θ の個数を述べて‥5 点

・$t=\pm1$ についての の言及がないものは不可

$$\begin{cases} a<-\dfrac{1}{8},\ 3<a \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ a=3 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ a=-\dfrac{1}{8},\ 1<a<3 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ a=1 \text{ のとき } 3 \text{ 個} \\ -\dfrac{1}{8}<a<1 \text{ のとき } 4 \text{ 個} \end{cases} \quad \cdots (\text{答})$$

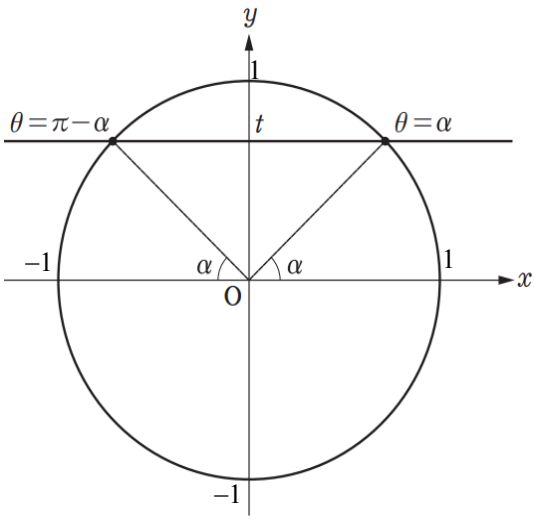
答‥5 点(完答)

(2)

(2)　30 点

$-1<t<1$ のとき，$\sin\theta=t$ を満たす θ の和について，t の値で場合分けして考える。

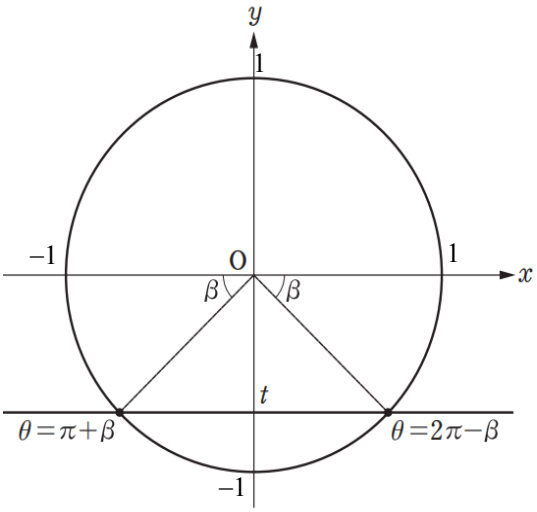
[1]　$0\leqq t<1$ のとき



上図のように角 $\alpha\left(0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をとると，$\sin\theta=t$ を満たす θ は $\theta=\alpha,\ \pi-\alpha$ である。したがって，これらの和は $\alpha+(\pi-\alpha)=\pi$ となる。

$0\leqq t<1$ のとき $\sin\theta=t$ を満たす θ の和が π であることを単位円の図示等により示して‥5 点

[2]　$-1<t<0$ のとき



上図のように角 $\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をとると，$\sin\theta=t$ を満たす θ は $\theta=\pi+\beta,\ 2\pi-\beta$ である。したがって，これらの和は $(\pi+\beta)+(2\pi-\beta)=3\pi$ となる。

$0\leqq a<1$ のとき，$2t^2+t-a=0$ は $0\leqq t<1,\ -1<t<0$ を満たす実数解 t をそれぞれ1つずつもつため，$2\sin^2\theta+\sin\theta-a=0$ を満たす4個の θ の和は $\pi+3\pi=4\pi$ となる。また，$-\dfrac{1}{8}<a<0$ のとき，

$2t^2+t-a=0$ は $-1<t<0$ を満たす相異なる実数解 t を2つもつため，4個の θ の和は $3\pi+3\pi=6\pi$ となる。ゆえに，

$2\sin^2\theta+\sin\theta-a=0$ を満たす θ が4個存在するとき，その4個の θ の和は以下のようになる。

$$\begin{cases} 0\leqq a<1 \text{ のとき } 4\pi \\ -\dfrac{1}{8}<a<0 \text{ のとき } 6\pi \end{cases}$$ ・・・(答)

(2)[別解]

$-1<t<1$ のとき，$\sin\theta=t$ を満たす θ の和について，t の値で場合分けして考える。$\sin\theta=t$ を満たす θ を α とおく。

[1] $0\leqq t<1$ のとき

$0\leqq t<1$ のとき，$0\leqq\alpha\leqq\pi$ かつ $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$ である。このとき，

$-1<t<0$ のとき $\sin\theta=t$ を満たす θ の和が 3π であることを単位円の図示等により示して ・・5点

$0\leqq a<1$ のときの $2t^2+t-a=0$ の解 t の配置・・5点

$-\dfrac{1}{8}<a<0$ のときの $2t^2+t-a=0$ の解 t の配置・・5点

答・・10点(完答)

(2)[別解] 30点

$0\leqq t<1$ のとき $\sin\theta=t$ を満たす θ の和は π ・・5点

・$0\leqq\pi-\alpha\leqq\pi$ と

$0 \leqq \pi-\alpha \leqq \pi$ かつ $\pi-\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ である。$\pi-\alpha \neq \alpha$ であり，$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ となるため，もう1つの解は $\pi-\alpha$ である。したがって，これらの和は π となる。 [2] $-1<t<0$ のとき また，$-1<t<0$ のとき，$\pi<\alpha<2\pi$ かつ $\alpha \neq \dfrac{3}{2}\pi$ である。このとき，$\pi<3\pi-\alpha<2\pi$ かつ $3\pi-\alpha \neq \dfrac{3}{2}\pi$ である。$3\pi-\alpha \neq \alpha$ であり，$\sin(3\pi-\alpha)=\sin\alpha$ となるため，もう1つの解は $3\pi-\alpha$ である。したがって，これらの和は 3π となる。 (以下本解と同じ)	**$\pi-\alpha \neq \alpha$ を述べていないとき各1点減点** **$-1<t<0$ のとき $\sin\theta=t$ を満たす θ の和は 3π ‥5点** **・$\pi<3\pi-\alpha<2\pi$ と $3\pi-\alpha \neq \alpha$ を述べていないとき各1点減点** **本解と同様‥20点**

4 （５０点）

【解答・採点基準】

50 点

$y=x^3-x$ について，$y'=3x^2-1$ であるから，ℓ の方程式は

$$y-\left(t^3-t\right)=\left(3t^2-1\right)(x-t)$$
$$\Leftrightarrow y=\left(3t^2-1\right)x-2t^3$$

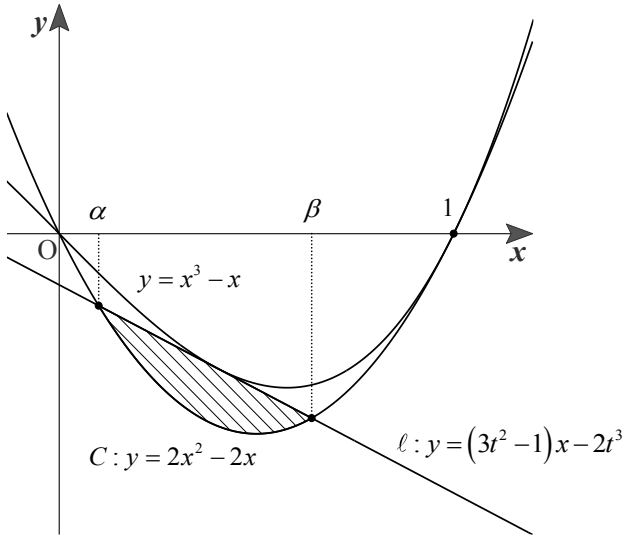
である。したがって，C と ℓ の共有点の x 座標は

ℓ の方程式‥5 点

$$2x^2-2x=\left(3t^2-1\right)x-2t^3$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-\left(3t^2+1\right)x+2t^3=0$$

の相異なる 2 つの実数解となる。この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおき，C と ℓ によって囲まれた部分の面積を S とおくと，S は下図斜線部の面積となる。

C と ℓ の共有点の x 座標を求める 2 次方程式‥5 点



S が表す領域の図示‥5 点

解と係数の関係により $(\alpha+\beta,\ \alpha\beta)=\left(\dfrac{3t^2+1}{2},\ t^3\right)$ が成り立つから，

$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ を t を用いて表して‥4 点(各 2 点×2)

上図より S は

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\left\{\left(3t^2-1\right)x-2t^3\right\}-\left(2x^2-2x\right)\right]dx$$
$$=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{3}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{3t^2+1}{2}\right)^2-4t^3\right\}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{24}\left(9t^4-16t^3+6t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$$

となる。$f(t)=9t^4-16t^3+6t^2+1\ (0<t<1)$ とおくと，

$S=\frac{1}{24}\{f(t)\}^{\frac{3}{2}}$ の最大値を与える t と $f(t)$ の最大値を与える t は同じである。

$$f'(t)=36t^3-48t^2+12t$$
$$=12t(3t-1)(t-1)$$

であるから，$f(t)$ の増減表は下表である。

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(1)	↗	$\frac{32}{27}$	↘	(0)

したがって，S の最大値は

$$\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{32}{27}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{16\sqrt{6}}{729}$$

となる。

(答) $\frac{16\sqrt{6}}{729}$

S の立式‥6 点

S を t を用いて表して‥5 点

$f(t)$ の導関数‥5 点

$f(t)$ の増減表‥5 点

答‥10 点

5 （５０点）

「P が A を出発してから a 秒後，$a+b$ 秒後，$a+b+c$ 秒後にいる頂点を結んでできる図形」と「P が A を出発してから 0 秒後，b 秒後，$b+c$ 秒後にいる頂点を結んでできる図形」の形状は等しいから，この図形が $\frac{\pi}{4}$ の角を少なくとも 1 つもつような三角形である確率を求めればよい。以下，頂点 A, B, C, ……, H をそれぞれ $A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_7$ とする。正八角形の外接円について，円周角の定理より「A_0A_2 などのように頂点を 1 つとばした辺をもち，とばした頂点と異なる頂点をもつ三角形」が条件を満たす三角形である。したがって，条件を満たす三角形は

$$\triangle A_0A_2A_3,\ \triangle A_0A_2A_4,\ \triangle A_0A_2A_5,\ \triangle A_0A_2A_6,\ \triangle A_0A_2A_7,$$
$$\triangle A_0A_6A_5,\ \triangle A_0A_6A_4,\ \triangle A_0A_6A_3,\ \triangle A_0A_6A_1,$$
$$\triangle A_0A_1A_3,\ \triangle A_0A_3A_5,\ \triangle A_0A_5A_7$$

である。このうち，2 回目と 3 回目のサイコロの目の出方が 1 通りであるのは，A_0A_1 以外の正八角形の辺を 1 つの辺としてもつ三角形であり，$\triangle A_0A_2A_3, \triangle A_0A_2A_7, \triangle A_0A_6A_5, \triangle A_0A_5A_7$ の 4 つである。これら以外の 8 つの三角形は 2 通りの目の出方がある。以上より，求める確率は

$$\frac{1\cdot 4+8\cdot 2}{6^2}=\frac{5}{9}$$

である。

(答) $\frac{5}{9}$

[別解 1]

正八角形の外接円について，円周角の定理より 3 つの頂点を結んでできる三角形の角の大きさはすべて $\frac{\pi}{8}$ の倍数である。よって，条件を満たす三角形となるのは，以下の 3 つの場合である。

50 点

a が図形の形状に影響を及ぼさない‥14 点

条件を満たす三角形を列挙‥12 点(完答)

目の出方が 1 通りの三角形を列挙‥12 点(完答)

答‥12 点

[別解 1]　50 点

[1] 3つの頂点を結んでできる三角形の角の大きさが

$\left(\frac{2\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$ となる場合

[2] 3つの頂点を結んでできる三角形の角の大きさが

$\left(\frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}\right)$ となる場合

[3] 3つの頂点を結んでできる三角形の角の大きさが

$\left(\frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$ となる場合

3つの頂点を結んでできる図形の形状は (b, c) によって定まり，[1], [2], [3] となるのはそれぞれ (b, c) が下表となる場合である。

		c					
		1	2	3	4	5	6
b	1		[1]			[1]	
	2	[1]	[2]	[3]	[2]	[1]	
	3		[3]	[3]			[1]
	4		[2]				[2]
	5	[1]	[1]			[3]	[3]
	6			[1]	[2]	[3]	[2]

以上より，求める確率は

$$\frac{20}{6^2} = \frac{5}{9}$$

である。

(答) $\frac{5}{9}$

[別解 2]

正八角形の外接円について，円周角の定理より3つの頂点を結んでできる三角形の角の大きさはすべて $\frac{\pi}{8}$ の倍数である。

よって，条件を満たす三角形とならないのは，以下の3つの場合である。

[1] 3つの頂点を結んでできる図形が三角形とならない場合

条件を満たす三角形の形を3つ列挙
‥12点(完答)
a が図形の形状に影響を及ぼさない
‥14点

適当な目の出方を20通り数え上げ
‥12点(完答)

答‥12点

[別解 2] 50点

[2] 3つの頂点を結んでできる三角形の角の大きさが

$\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}\right)$ となる場合

[3] 3つの頂点を結んでできる三角形の角の大きさが

$\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}\right)$ となる場合

3つの頂点を結んでできる図形の形状は (b, c) によって定まり, [1], [2], [3] となるのはそれぞれ (b, c) が下表となる場合である。

		c					
		1	2	3	4	5	6
b	1	[2]		[3]	[3]		[2]
	2						[1]
	3	[3]			[3]	[1]	
	4	[3]		[3]	[1]	[3]	
	5			[1]	[3]		
	6	[2]	[1]				

以上より，求める確率は

$$1-\frac{16}{6^2}=\frac{5}{9}$$

である。

(答) $\frac{5}{9}$

条件を満たさない図形の形を3つ列挙
‥12点(完答)
a が図形の形状に影響を及ぼさない
‥14点

適当な目の出方を16通り数え上げ
‥12点(完答)

答‥12点