２０２４年　第２回一橋大本番レベル模試・数学

解答・解説・採点基準

全５問　１２０分　２５０点満点

Ⅰ　（５０点）

(1)

実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。このとき，

$3^4 < 140 < 3^5$ より，

$$f(3)=\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{140}{3^k}\right]=46+15+5+1=67$$

である。また，$2^7 < 140 < 2^8$ より，

$$f(2)=\sum_{k=1}^{7}\left[\frac{140}{2^k}\right]=70+35+17+8+4+2+1=137$$

である。したがって，140! は 2 で 137 回割り切れるため，4 で

$\left[\frac{137}{2}\right]$ 回，すなわち 68 回割り切れる。ゆえに，$f(4)=68$ である。

また，$12=3\cdot 4$ より，140! は 3 の倍数でも 4 の倍数でもない正の整数 S を用いて

$$\begin{aligned}140!&=3^{67}\cdot 4^{68}\cdot S\\&=12^{67}\cdot 4\cdot S\end{aligned}$$

とかける。$4S$ は 12 で割り切れないため，$f(12)$ は $f(3)$ と $f(4)$ のうち，最小値である $f(3)$ と等しい。ゆえに，

$$f(12)=f(3)=67$$

である。以上より，

$$f(3)=67,\ f(4)=68,\ f(12)=67 \qquad \cdots(答)$$

である。

(2)

（1）　20 点

3 で割り切れる回数を求めて‥5 点

2 で割り切れる回数を求めて‥3 点

4 で割り切れる回数を求めて‥5 点

$f(12)$ は $f(3)$ と $f(4)$ のうちの最小値と等しい‥3 点

12 で割り切れる回数を求めて‥4 点

（2）　30 点

$5^3 < 140 < 5^4$ より，

$$f(5) = \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{140}{5^k} \right] = 28 + 5 + 1 = 34$$

である。140! は 3^a, 4^b, 5^c でそれぞれ $\left[\frac{67}{a} \right]$ 回，$\left[\frac{137}{2b} \right]$ 回，$\left[\frac{34}{c} \right]$ 回割り切れるため，$f\left(3^a 4^b 5^c\right)$ は $\left[\frac{67}{a} \right], \left[\frac{137}{2b} \right], \left[\frac{34}{c} \right]$ のうちの最小値と等しい。

$$\left[\frac{137}{2b} \right] = 17 \Leftrightarrow b = 4$$
$$\left[\frac{34}{c} \right] = 17 \Leftrightarrow c = 2$$

である。一方，

$$\left[\frac{67}{4} \right] = 16 < 17 < 22 = \left[\frac{67}{3} \right]$$

であるため，$\left[\frac{67}{a} \right] = 17$ を満たす正の整数 a は存在しない。$b = 4$ のとき，$\left[\frac{137}{2b} \right]$ が最小値となるのは，$a \leqq 3$ かつ $c \leqq 2$ のときであるため，これを満たす (a, c) の組は 6 組である。$c = 2$ のとき，$\left[\frac{34}{c} \right]$ が最小値となるのは，$a \leqq 3$ かつ $b \leqq 4$ のときであるため，これを満たす (a, b) の組は 12 組である。$(a, b, c) = (i, 4, 2)$ $(i = 1, 2, 3)$ となる 3 組を重複して数えているため，$f\left(3^a 4^b 5^c\right) = 17$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) の個数は

$$6 + 12 - 3 = 15 \text{(個)} \qquad \cdots \text{(答)}$$

である。

5 で割り切れる回数を求めて‥5 点

$f\left(3^a 4^b 5^c\right)$ は $\left[\frac{67}{a} \right], \left[\frac{137}{2b} \right], \left[\frac{34}{c} \right]$ のうちの最小値と等しい‥5 点

$b = 4,\ c = 2$ のとき $\left[\frac{137}{2b} \right], \left[\frac{34}{c} \right] = 17$ ‥6 点(各 3 点×2)

$\left[\frac{67}{a} \right] = 17$ を満たす a は存在しない‥3 点

$\left[\frac{137}{2b} \right]$ が最小値となる a, c の範囲を求めて‥3 点

$\left[\frac{34}{c} \right]$ が最小値となる a, b の範囲を求めて‥3 点

答‥5 点

2 （５０点）

(1)

$t=2^x+2^{-x}m$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{2x+2}+2^x\left(m^2-32\right)+8m+2^{-x}\left(m^3-32m\right)+2^{-2x+2}m^2 \\ &= 4\left(2^x+2^{-x}m\right)^2+\left(m^2-32\right)\left(2^x+2^{-x}m\right) \\ &= 4t^2+\left(m^2-32\right)t \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(x)=4t^2+\left(m^2-32\right)t$

(2)

(1)の結果を踏まえて，$g(t)=4t^2+\left(m^2-32\right)t$ とおく。このとき，2^x, $2^{-x}m$ はともに正の実数であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より t の値域は

$$t \geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}m}=2\sqrt{m}$$

である。したがって，

$$g(t)=0$$

$$\Leftrightarrow 4t\left\{t-\left(8-\frac{m^2}{4}\right)\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=8-\dfrac{m^2}{4} & \left(8-\dfrac{m^2}{4}\geqq 2\sqrt{m}\text{ のとき}\right) \\ \text{解無し} & \left(8-\dfrac{m^2}{4}<2\sqrt{m}\text{ のとき}\right) \end{cases} \quad \cdots ①$$

となる。ここで，$y=8-\dfrac{m^2}{4}$, $y=2\sqrt{m}$ のグラフは下図のようになる。

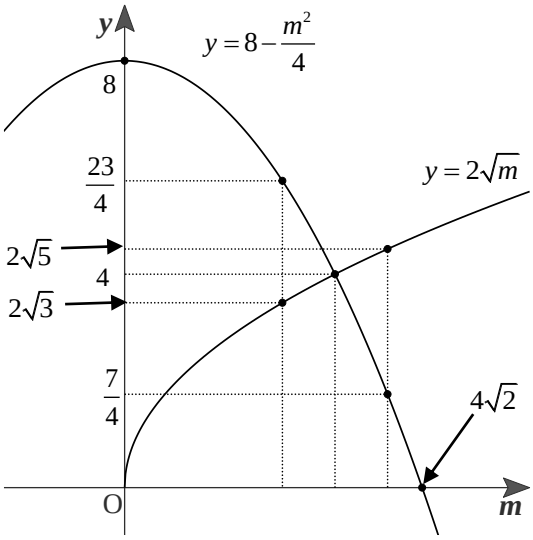
(1)　10 点

答‥10 点

(2)　40 点

$f(x)=0$ の t の解を求めて‥12 点(完答)

$\left(8-\dfrac{m^2}{4}<\sqrt{2m}\right.$ で解無しになることについて言及がない場合 10 点)



上図より，①は

$m=1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき $t=8-\frac{m^2}{4}$，$m=5,\ 6,\ 7,\ \cdots$ のとき解無し

となる。以下，$m=1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき，x の実数解の個数がいくつになるかを考える。$m=4$ のとき，

$$t=8-\frac{m^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2^x+4\cdot 2^{-x}=8-\frac{4^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left(2^x-2\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow 2^x=2$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

でただ1つの実数解をもつ。$m=1,\ 2,\ 3$ のとき，

$\left(8-\frac{m^2}{4}\right)^2-\left(2\sqrt{m}\right)^2>0$ であり，また

$$8-\frac{m^2}{4}-\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-8\right)^2-\left(2\sqrt{m}\right)^2}>8-\frac{m^2}{4}-\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-8\right)^2}$$
$$=0$$

であることに気をつけると

各 m における $8-\frac{m^2}{4}$ と $\sqrt{2m}$ の大小関係をまとめて‥10 点

$m=5,\ 6,\ 7,\ \cdots$ で解無し‥6 点

$m=4$ で1つ‥6 点

$$t=8-\frac{m^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}+\left(\frac{m^2}{4}-8\right)2^x+m=0$$

$$\Leftrightarrow 2^x=\frac{8-\frac{m^2}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-8\right)^2-\left(2\sqrt{m}\right)^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\log_2\left\{\frac{8-\frac{m^2}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-8\right)^2-\left(2\sqrt{m}\right)^2}}{2}\right\}$$

で 2 つの実数解をもつ。よって，$f(x)=0$ の実数解の個数は

$m=1,2,3$ で 2 つ，$m=4$ で 1 つ，$m=5,6,7,\cdots$ で解無し

となる。

(答) $m=1,2,3$ で 2 つ，$m=4$ で 1 つ，$m=5,6,7,\cdots$ で解無し

(2)[別解]

$2^x,\ 2^{-x}m>0$ より相加平均と相乗平均の大小関係から

$2^x+2^{-x}m\geqq 2\sqrt{m}>0$ である。よって，(1)より

$$f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}m=8-\frac{m^2}{4}$$

となる。したがって，x についての方程式

$$2^x+2^{-x}m=8-\frac{m^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2+\left(\frac{m^2}{4}-8\right)2^x+m=0$$

の解の個数が答となるが，これは，s についての方程式

$$s^2+\left(\frac{m^2}{4}-8\right)s+m=0$$

の正の実数解の個数に等しい。ここで，

$$h(s)=s^2+\left(\frac{m^2}{4}-8\right)s+m$$

とおき，下に凸な放物線 $y=h(s)$ の軸が $s=4-\frac{m^2}{8}$ になることを踏まえて，場合分けを行う。

$m=1,2,3$ で 2 つ ‥6 点

（2 つの実数解になることが示せていれば解を求めていなくても可）

(2)［別解］ 40 点

$f(x)=0$
$\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}m$
$=8-\frac{m^2}{4}$
‥6 点

$h(s)=0$ の正の実数解の個数を求める方針‥6 点
（s の値域を考慮していない場合 4 点）

[1] $4-\dfrac{m^2}{8} \leqq 0$ のとき

すなわち

$$4-\frac{m^2}{8} \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow m^2 \geqq 32$$
$$\therefore m = 6, 7, 8, \cdots$$

のとき，$h(0)=m>0$ より $h(s)=0$ の正の実数解は存在しない。

$m=6, 7, 8, \cdots$ で解無し‥4 点

[2] $4-\dfrac{m^2}{8} > 0$ のとき

すなわち

$$4-\frac{m^2}{8} > 0$$
$$\Leftrightarrow m = 1, 2, 3, 4, 5$$

のときを考える。$h(s)=0$ の判別式を $D(m)$ とすると，$h(0)=m>0$ より $h(s)=0$ の正の実数解の個数は

$D(m)>0$ のとき 2 つ，$D(m)=0$ のとき 1 つ，$D(m)<0$ のとき解無し　　・・・①'

となる。ここで，

$$D(m)=\left(\frac{m^2}{4}-8\right)^2-4m$$

であるから，$m=1, 2, 3, 4, 5$ で実際に $D(m)$ を計算すると

$$D(1)=\frac{897}{16}>0$$
$$D(2)=41>0$$
$$D(3)=\frac{337}{16}>0$$
$$D(4)=0$$
$$D(5)=-\frac{271}{16}<0$$

となる。よって，①'は

$m=1, 2, 3$ のとき 2 つ，$m=4$ のとき 1 つ，$m=5$ のとき解無し

といえる。

各 m における $D(m)$ の正負をまとめて‥10 点（各 2 点×5）

$m=1, 2, 3$ で 2 つ‥6 点

$m=4$ で 1 つ‥6 点

$m=5$ で解無し‥2 点

以上, [1], [2]より，$h(s)=0$の正の実数解の個数は

$m=1, 2, 3$で2つ，$m=4$で1つ，$m=5, 6, 7, \cdots$で解無し

であり，このことから$f(x)=0$の実数解の個数は

$m=1, 2, 3$で2つ，$m=4$で1つ，$m=5, 6, 7, \cdots$で解無し

となる。

(答) $m=1, 2, 3$で2つ，$m=4$で1つ，$m=5, 6, 7, \cdots$で解無し

3 （５０点）

(1)

$$f(x)=x^2+(a-3)(a^2b+a-2b)x+a-2$$

とおく。2 次方程式 $f(x)=0$ が $\tan\alpha,\ \tan\beta$ を解にもつことから，解と係数の関係より

$$\tan\alpha\tan\beta=a-2<0$$

が成り立つ。$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ より，$\tan\alpha<\tan\beta$ であるため，

$$\tan\alpha<0<\tan\beta$$

である。$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ とあわせて，

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

である。したがって，

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

解と係数の関係より

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=(3-a)(a^2b+a-2b)\\ \tan\alpha\tan\beta=a-2\end{cases}$$

が成り立つ。したがって，正接の加法定理より

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{(3-a)(a^2b+a-2b)}{3-a}\ (\because 3-a\neq 0)\\&=a^2b+a-2b\end{aligned}$$

となる。$-1\leqq a\leqq 1,\ -1\leqq b\leqq 1$ のとき，$a^2b+a-2b$ の取りうる値の範囲を求める。

$$a^2b+a-2b=(a^2-2)b+a$$

(1)　16 点

$\tan\alpha\tan\beta<0$

・・5 点

$\tan\alpha<0<\tan\beta$

・・3 点

$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0<\beta<\frac{\pi}{2}$

・・3 点

$-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

・・5 点

(2)　34 点

$\tan\alpha+\tan\beta$，$\tan\alpha\tan\beta$ を $a,\ b$ の式で表して

・・5 点

$\tan(\alpha+\beta)$ を $a,\ b$ の式で表して

・・5 点

と変形できる。$(a^2-2)b+a$ を b の1次関数とみると，$a^2-2<0$ より，

$b=-1$ のとき最大値 $-a^2+a+2$

$b=1$ のとき最小値 a^2+a-2

をとる。$-a^2+a+2$ を平方完成すると，

$$-a^2+a+2=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

となるため，$-a^2+a+2$ は $a=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。また，

a^2+a-2 を平方完成すると，

$$a^2+a-2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

となるため，a^2+a-2 は $a=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{9}{4}$ をとる。したがって，$\tan(\alpha+\beta)$ は

最大値 $\frac{9}{4}$，最小値 $-\frac{9}{4}$　　・・・(答)

をとる。

(2)[別解]〔$a^2b+a-2b$ の最大値と最小値の求値〕

($\tan(\alpha+\beta)=a^2b+a-2b$ と求める部分まで共通)

実数 k を用いて

$$a^2b+a-2b=k \qquad \cdots ①$$

とおく。①が $-1\leqq a\leqq 1,\ -1\leqq b\leqq 1$ の範囲で実数解をもつような k の範囲を求める。①を b の方程式とみると，

$$b=\frac{k-a}{a^2-2}\ (\because a^2-2<0)$$

と表せる。$-1\leqq b\leqq 1$ より，

$$-1\leqq\frac{k-a}{a^2-2}\leqq 1$$
$$\Leftrightarrow -(a^2-2)\geqq k-a\geqq a^2-2\ (\because a^2-2<0)$$
$$\Leftrightarrow a^2+a-2\leqq k\leqq -a^2+a+2$$

である。ここで，$-a^2+a+2$ を平方完成すると，

$(a^2-2)b+a$ を b の関数とみて・・4 点

最大値と最小値を a の式で表して・・8 点(各 4 点×2)

最大値を求めて・・4 点

最小値を求めて・・4 点

答・・4 点(完答)

(2)[別解]　34 点

本解と共通・・10 点

$b=\frac{k-a}{a^2-2}$ ・・4 点

k の範囲を a の式で表して・・8 点

$$-a^2+a+2=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

となるため，$-a^2+a+2$ は $a=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。また，

a^2+a-2 を平方完成すると，

$$a^2+a-2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

となるため，a^2+a-2 は $a=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{9}{4}$ をとる。したがって，

$$-\frac{9}{4}\leqq k\leqq\frac{9}{4}$$

である。ゆえに，$\tan(\alpha+\beta)$ は

最大値 $\frac{9}{4}$，最小値 $-\frac{9}{4}$　　・・・(答)

をとる。

最大値を求めて

・・4 点

最小値を求めて

・・4 点

答・・4 点(完答)

4 （５０点）

折れ線 L のうち，線分 OA を L_1，線分 AB から A を除いたものを L_2 とする。L_2 は y 軸と平行であるから，C との共有点は高々1個である。以下，L_1 および L_2 と C の共有点の個数で場合分けをおこなう。

[1] L_1 と C が共有点を 2 個もつとき

直線 OA の式は $y=x$ であるから，直線 OA と C の共有点の x 座標は

$$x^2+ax+b=x \Leftrightarrow x^2+(a-1)x+b=0$$

の実数解である。よって，

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+(a-1)x+b \\ &=\left(x+\frac{a-1}{2}\right)^2-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+b \end{aligned}$$

とし，方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，L_1 と C が共有点を 2 個もつ必要十分条件は，$f(x)=0$ が $0 \leqq x \leqq 1$ に相異なる 2 つの実数解をもつことである。すなわち

$$\begin{cases} f(0) \geqq 0 \\ f(1) \geqq 0 \\ 0<\dfrac{1-a}{2}<1 \\ D>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqq 0 \\ a+b \geqq 0 \\ -1<a<1 \\ b<\dfrac{1}{4}(a-1)^2 \end{cases}$$

であり，連立不等式が表す (a, b) の範囲を図示すると，下図のようになる。ただし，境界線は実線部を含み，破線部を含まない。また，端点は黒丸を含み，白丸を含まない。

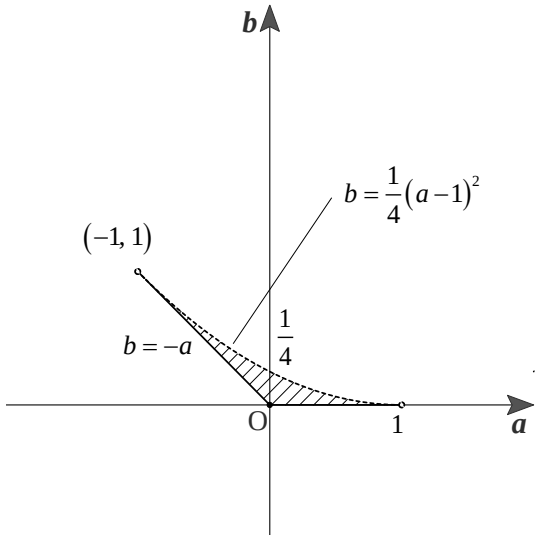
50 点

L_2（線分 AB）と C の共有点は高々 1 個‥5 点

L_1, L_2 と C の共有点の個数で場合分けする方針‥5 点

L_1 と C が共有点を 2 個もつ必要十分条件を $f(x)=0$ の解の存在条件で表して‥5 点

条件を a, b の連立不等式で表して‥10 点（完答）



ここで $f(1) \geqq 0$ より，このとき L_2 と C は共有点をもたず，L と C の共有点は 2 個である。

[2] L_1 と C，L_2 と C が共有点を 1 個ずつもつとき

L_1 と C が共有点をちょうど 1 個もつ必要十分条件は，$f(0)$，$f(1)$ の正負が異なることである。また，L_2 と C が共有点をちょうど 1 個もつ必要十分条件は，$g(x)=x^2+ax+b$ としたとき $0 \leqq g(1) < 1$ であることである。よって考える条件は

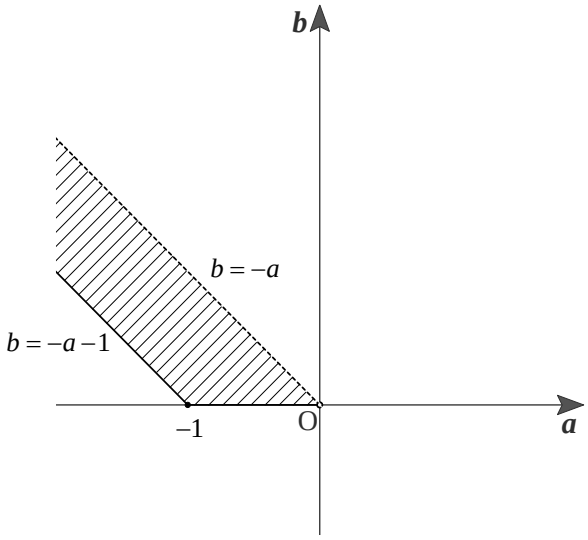
$$\begin{cases} f(0)f(1) \leqq 0 \\ 0 \leqq g(1) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)b \leqq 0 \\ 0 \leqq a+b+1 < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \geqq 0 \\ 0 \leqq a+b+1 < 1 \end{cases}$$

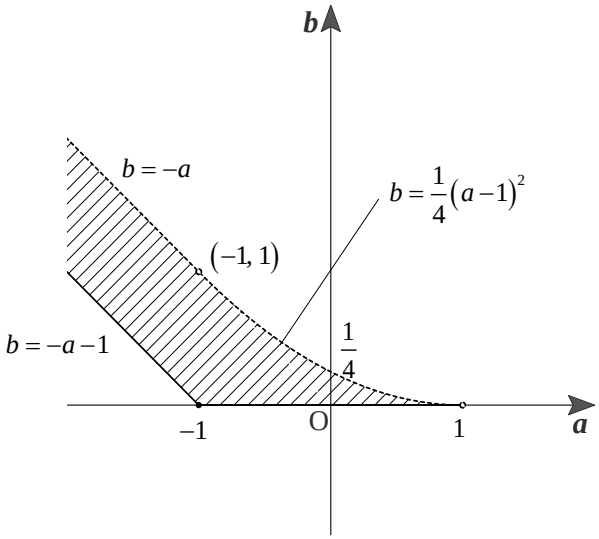
であり，連立不等式が表す (a, b) の範囲を図示すると，下図のようになる。ただし，境界線は実線部を含み，破線部を含まない。また，端点は黒丸を含み，白丸を含まない。

L_1 と C, L_2 と C が共有点を 1 個ずつもつ必要十分条件を a, b の連立不等式で表して

‥10 点(完答)



以上, [1], [2]より，求める (a, b) の範囲は下図の斜線部のようになる。ただし，境界線は実線部を含み，破線部を含まない。また，端点は黒丸を含み，白丸を含まない。



・・・(答)

答‥15 点

・境界条件(端点あるいは境界線を範囲に含むか)を 1 箇所間違えるごとに 5 点減点

・求める範囲の概形(境界条件以外)を間違えていれば加点しない

5 （５０点）

以下，試行を n 回繰り返した後の持ち点を X_n と表す。

(1)

$n=1$ のとき，1回目の試行で1または6が出ればゲームの終了時の持ち点が1となることから，$p_1=\frac{1}{3}$ である。$X_n=1$ のとき，$n+1$ 回目の試行で1または6が出れば，$X_{n+1}=1$ となる。また，$X_n \geqq 2$ のとき，$n+1$ 回目の試行で6が出れば，$X_{n+1}=1$ となる。以上より，数列 $\{p_n\}$ について以下の漸化式が成り立つ。

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}(1-p_n)=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}$$

これより，$p_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{1}{5}\right)$ となることから，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{5}\right\}$ は，初項 $p_1-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$，公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列となり

$$p_n-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{5} \qquad \cdots(答)$$

と求まる。

(1)[別解]

k を n 以下の正の整数とすると，$X_n=1$ となるのは

(a) n 回の試行すべてで1が出る場合

(b) k 回目の試行で6が出て，以降 $n-k$ 回の試行すべてで1が出る場合

のいずれかである。(a)の確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。また，(b)の確率は

(1) 20点

$p_1=\frac{1}{3}$ ‥2点

$X_n=1,\ X_n \geqq 2$ の状態に関する遷移を正しく整理して‥8点

数列 $\{p_n\}$ の漸化式 $p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}$ を導いて‥4点

答‥6点

(1)[別解] 20点

$X_n=1$ となる条件を求めて‥8点

(a)の確率を求めて‥2点

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{6^{k-1}}{6^n}$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)^n\frac{6^n-1}{6-1}$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

である。以上より, (a), (b)は排反事象であるから，求める確率は

$$p_n=\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

$$\therefore p_n=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{5}$$ ・・・(答)

である。

(2)

$n=1$ のとき，1回目の試行で2が出ればゲーム終了時の持ち点が2となることから，$q_1=\frac{1}{6}$ である。$X_n=1$ のとき，$n+1$ 回目の試行で2が出れば，$X_{n+1}=2$ となる。また，$X_n=2$ のとき，$n+1$ 回目の試行で1が出れば，$X_{n+1}=2$ となる。さらに，$X_n\geqq 3$ のとき，$n+1$ 回目の試行での出目にかかわらず，$X_{n+1}=2$ とならない。以上より，数列 $\{q_n\}$ について以下の漸化式が成り立つ。

$$q_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n$$

以下，数学的帰納法を利用して，任意の正の整数 n で $q_n>0.04$ となることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$q_1=\frac{1}{6}$ より，$q_n>\frac{1}{25}=0.04$ を満たす。

[2] $n=m$ (m は正の整数)のとき

$q_n>0.04$ が成り立つ，すなわち $q_m>0.04$ と表されると仮定する。(1)の結果より $p_m>\frac{1}{5}$ であるから，

$$q_{m+1}=\frac{1}{6}p_m+\frac{1}{6}q_m>\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot 0.04=0.04$$

より，$n=m+1$ のときも $q_n>0.04$ を満たす。

(b)の確率を求める式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}$ を導いて・・4 点

答・・6 点

(2)　30 点

$q_1=\frac{1}{6}$ ・・2 点

$X_n=1,\ X_n=2,$ $X_n\geqq 3$ の状態に関する遷移を正しく整理して・・8 点

$q_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n$ ・・6 点

数学的帰納法を用いる方針・・4 点

$n=1$ のとき $q_n>0.04$ を満たす ・・2 点

$q_m>0.04$ が成り立つとき $q_{m+1}>0.04$ ・・4 点

以上, [1], [2]より，n の値によらず q_n は 0.04 より大きい。

(証明終)

証明終‥4 点

(2)[別解]

(2)［別解］ 30 点

$n=1$ のとき，1 回目の試行で 2 が出ればゲーム終了時の持ち点が 2 となることから，$q_1=\frac{1}{6}$ である。$X_n=1$ のとき，$n+1$ 回目の試行で 2 が出れば，$X_{n+1}=2$ となる。また，$X_n=2$ のとき，$n+1$ 回目の試行で 1 が出れば，$X_{n+1}=2$ となる。さらに，$X_n \geqq 3$ のとき，$n+1$ 回目の試行での出目にかかわらず，$X_{n+1}=2$ とならない。以上より，数列 $\{q_n\}$ について以下の漸化式が成り立つ。

$q_1=\frac{1}{6}$ ‥2 点

$X_n=1,\ X_n=2,$ $X_n \geqq 3$ の状態に関する遷移を正しく整理して‥8 点

$$q_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n$$
$$\Leftrightarrow q_{n+1}=\frac{1}{6}q_n+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}+\frac{1}{30}$$
$$\Leftrightarrow 6^{n+1}q_{n+1}=6^n q_n+\frac{4}{5}+\frac{6^n}{5}$$

$q_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n$ ‥6 点

より，$r_n=6^n q_n$ とすると

$$r_{n+1}=r_n+\frac{4}{5}+\frac{6^n}{5}$$

数列 $\{r_n\}$ の漸化式 $r_{n+1}=r_n+\frac{4}{5}+\frac{6^n}{5}$ を導いて‥4 点

となる。したがって $n \geqq 2$ のとき

$$r_n=r_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{4}{5}+\frac{6^k}{5}\right)$$
$$=6\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{5}(n-1)+\frac{6^n-6}{5\cdot 5}$$
$$=\frac{4}{5}n-\frac{1}{25}+\frac{6^n}{25}$$

$r_n=\frac{4}{5}n-\frac{1}{25}+\frac{6^n}{25}$ $(n \geqq 2)$ を求めて‥2 点

となることから

$$q_n=\frac{r_n}{6^n}=\frac{1}{25}\left(\frac{20n-1}{6^n}+1\right)>0.04\ (n \geqq 2)$$

$q_n=\frac{20n-1}{25\cdot 6^n}+\frac{1}{25}$ $(n \geqq 2)$ を求めて‥4 点

となる。これと $q_1=\frac{1}{6}>\frac{1}{25}=0.04$ より，n の値によらず q_n は 0.04 より大きい。

(証明終)

証明終‥4 点