２０２１年　東京工業大学・本番レベル模試・物理

解答・解説・採点基準

全３問　１２０分　１５０点満点

I　（５０点）

【解答・採点基準】

[A]

(a)

糸が張った直後における小球 1, 2 の速度の y軸方向成分を v_1, v_2 とおくと，運動量保存則とエネルギー保存則より

$$\begin{cases} m_2v = m_1v_1 + m_2v_2 \\ \dfrac{1}{2}m_2v^2 = \dfrac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \dfrac{1}{2}m_2{v_2}^2 \end{cases}$$

が成り立つ。$v_1 > 0$であることに注意して上式を解けば

$$v_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v,\ v_2 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v$$

となる。また，このときの小球 1 から見た小球 2 の相対速度の y軸方向成分は

$$v_2 - v_1 = -v$$

と求まる。

(答) $v_1 = \dfrac{2m_2}{m_1+m_2}v,\ v_2 = \dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v$，相対速度：$-v$

〔別解〕

糸が張った直後における小球 1, 2 の速度の y軸方向成分を v_1, v_2 とおくと，糸が張る前後でエネルギー保存則が成り立つことから，糸の張る前後で反発係数が 1 の衝突と同様の関係式が成り立つ。したがって

[A]　計 12 点

(a)　7 点

*運動量保存とエネルギー保存則が立式できて 1 点

*答に各 2 点

〔別解〕　7 点

*運動量保存則とはね返りの式が立式できて 1 点

*答に各 2 点

$$\begin{cases} m_2 v = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ -1 = \dfrac{v_2 - v_1}{v - 0} \end{cases}$$

が成り立つ。以下，本解と同様。

(b) | (b) 5 点 *答に 5 点

糸が張った直後，小球 1, 2 の間の距離は L であるから(a)の結果より

$$\left|\frac{L}{-v}\right| = \frac{L}{v}$$

が求める答えである。

(答) $\dfrac{L}{v}$

[B] | [B] 計 28 点

(c) | (c) 7 点

*撃力が糸方向のみ働くことに 1 点

*(a)の結果を利用する方針に 2 点((a)と同様の計算を行った場合は立式に 2 点)

*答に各 1 点

一回目に糸が張る直前での小球 2 の速度の X, Y 軸方向成分はそれぞれ $v\cos\theta$, $v\sin\theta$ である。糸が張った時の撃力は糸と平行な方向，すなわち，X 軸方向にしかはたらかないため，糸が張る前後で小球 1, 2 の Y 軸方向の速度は変化せず

$$V_{1Y} = 0,\ V_{2Y} = v\sin\theta$$

である。一方，糸が張る前後における小球 1, 2 の X 軸方向の運動は，(a)の v を $v\cos\theta$ に置き換えたものと同様の運動であるから

$$V_{1X} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v\cos\theta,\ V_{2X} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v\cos\theta$$

となる。

(答) $V_{1X} = \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v\cos\theta,\ V_{2X} = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v\cos\theta$

$V_{1Y} = 0,\ V_{2Y} = v\sin\theta$

(d) | (d) 3 点 *答に各 1 点

(c)の結果より

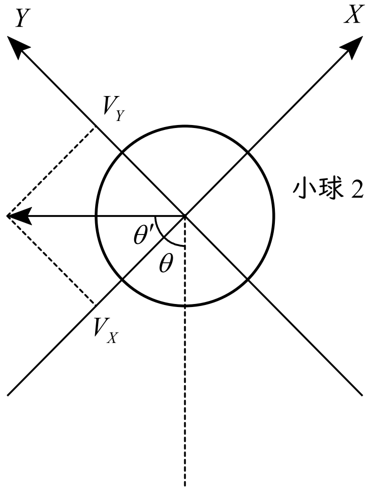
$$V_X = V_{2X} - V_{1X} = -v\cos\theta$$
$$V_Y = V_{2Y} - V_{1Y} = v\sin\theta$$
$$V = \sqrt{{V_X}^2 + {V_Y}^2} = v$$

と求まる。

(答) $V_X = -v\cos\theta,\ V_Y = v\sin\theta,\ V = v$

(e)

(d)の結果で $V_X < 0$ であることから, 1 回目に糸が張った直後の小球 1 から見た小球 2 の相対速度と θ' は下図のようになる。



したがって,

$$\tan\theta' = \frac{V_Y}{-V_X} = \tan\theta$$

となる。

(答) $\tan\theta' = \tan\theta$

(f)

(d), (e)の結果から, 1 回目に糸が張った後, 小球 2 は小球 1 から見て下図のように運動することがわかる。

(e) 6 点

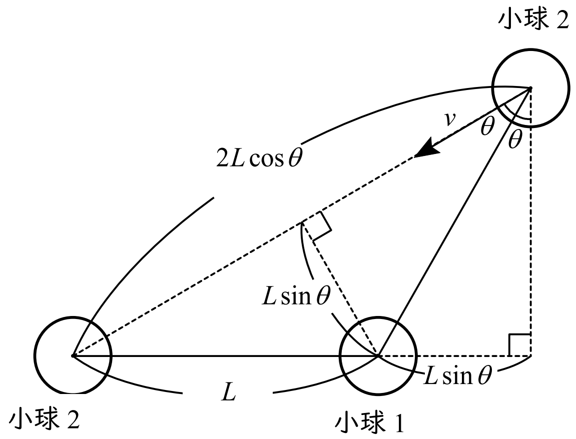
*幾何学的な性質(θ' の位置)に注目できて 2 点

*答に 4 点

(f) 6 点

*幾何学的な性質に注目できて 2 点

*答に 4 点



したがって，求める時間 t は

$$t = \frac{2L\cos\theta}{v}$$

である。

(答) $\dfrac{2L\cos\theta}{v}$

(g)

(f)の図より，求める答は $L\sin\theta$ となる。

(答) $L\sin\theta$

[C]

(h)

(d), (g), および(f)の図より，小球 1, 2 の最初の位置関係と相対速度を小球 1 を中心に $180° - 2\theta = 144°$ だけ回転させると次に小球 1, 2 が最接近した時の状況になる。したがって，対称性から小球 1 から見ると小球 2 は最初の位置から次に最接近するまでの運動を $144°$ ずつ回転させながら繰り返すことがわかる。この繰り返しによって全部で $360°$ の倍数だけ回転した時に小球 1, 2 は最初の状況に戻る。すなわち，全部で 5 回この運動が繰り返されたのちに相対的に最初の状況になる。これらのことを考慮すると小球 1 から見た小球 2 は下図のような軌跡を描くことがわかる。

(g)　6 点

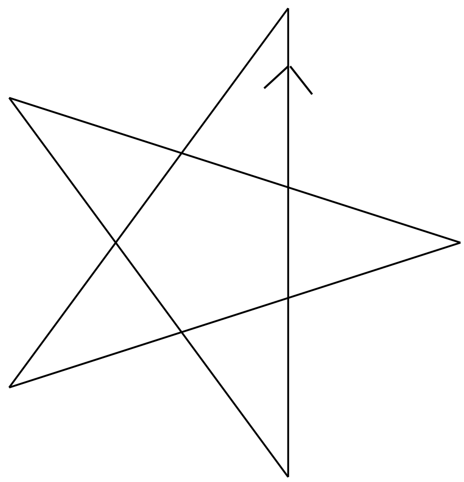
*答に 6 点

[C]　計 10 点

(h)　6 点

*対称性に注目できて 2 点

*答に 4 点(向きは書いてなくても良い)



(答) 上図

(i)

(h)で考えた対称性と(d)の結果により，小球 1 から見た小球 2 の相対速度の大きさは常に v であることがわかる。よって，(f)，(h)より，求める時間は

$$5t = \frac{10L\cos 18^\circ}{v}$$

となる。

(答) $\frac{10L\cos 18^\circ}{v}$

(i)　4 点

*相対速度が常に v であることに 1 点

*答に 3 点

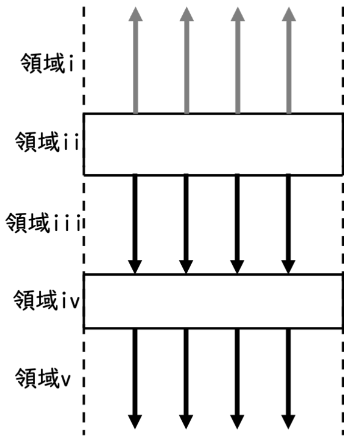
$\boxed{2}$ （５０点）

【解答・採点基準】

[A]

(a) (ア) $2\pi kQ$, (イ) $2\pi kQ$, (ウ) $2\pi kQ$

(b)



(答) 上図

(c)

領域 i：$\dfrac{2\pi kQ}{S}$, 領域 ii：0, 領域 iii：$\dfrac{2\pi kQ}{S}$, 領域 iv：0, 領域 v：$\dfrac{2\pi kQ}{S}$

(d)

[A] 計 26 点

(a)　6 点

＊答に各 2 点×3

(b)　4 点

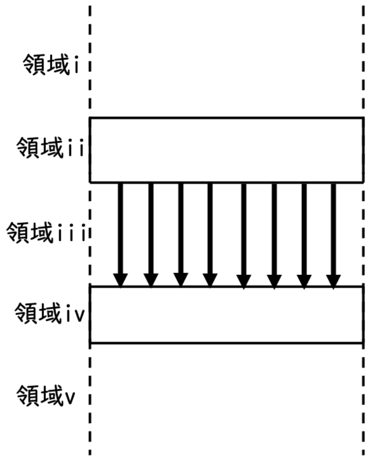
＊領域 ii～v のうち，矢印の本数，向きが正しく描けている領域に各 1 点×4

(c)　5 点

＊答に各 1 点×5

(d)　5 点

＊領域 i～v のうち，矢印の本数，向きが正しく描けている領域に各 1 点×5



(答) 上図

(e)

(d)より極板間の電気力線は $4\pi kQ$ 本であるから，極板間の電場の大きさは $\dfrac{4\pi kQ}{S}$ であり，電位差は $\dfrac{4\pi kQd}{S}$ である。よって与えられたコンデンサーの電気容量の定義より

$$\frac{Q}{\dfrac{4\pi kQd}{S}} = \frac{S}{4\pi kd}$$

(答) $\dfrac{S}{4\pi kd}$

(e)［別解］

平行平板コンデンサーの電気容量の式より

$$\frac{S}{4\pi kd}$$

(答) $\dfrac{S}{4\pi kd}$

［B］

(f) (エ) $\dfrac{2kQ'}{rL}$, (オ) ⑤, (カ) $\dfrac{2kQ'}{L}$

(g)

スイッチ S を閉じてから十分時間が経過し

(e) 6 点

＊極板間の電位差を求めて 3 点

＊答に 3 点

(e)［別解］ 6 点

＊答に 6 点

［B］ 計 24 点

(f) 6 点

＊答に各 2 点×3

(g) 6 点

＊極板間の電位差が V_0 に等しい

た後，極板間の電位差は V_0 に等しいから

$$\frac{2kQ'}{L}\log_e\frac{b}{a}=V_0$$

$$\therefore Q'=\frac{V_0L}{2k\log_e\frac{b}{a}}$$

(答) $Q'=\dfrac{V_0L}{2k\log_e\frac{b}{a}}$

ことに 3 点

＊答に 3 点

(h)

(h) 6 点

(g)の結果より，求める電気容量を C_0 とすると

＊電気容量の定義式を用いて 3 点

$$C_0=\frac{Q'}{V_0}=\frac{L}{2k\log_e\frac{b}{a}}$$

(答) $\dfrac{L}{2k\log_e\frac{b}{a}}$

＊答に 3 点

(i)

(i) 6 点

抵抗で発生したジュール熱は電池がした仕事からコンデンサーに蓄えられた静電エネルギーを引くことにより求められ

＊電池がした仕事に 2 点

＊静電エネルギーに 2 点

$$C_0V_0^2-\frac{1}{2}C_0V_0^2=\frac{1}{2}C_0V_0^2=\frac{V_0^2L}{4k\log_e\frac{b}{a}}$$

(答) $\dfrac{V_0^2L}{4k\log_e\frac{b}{a}}$

＊答に 2 点

3 （５０点）

【解答・採点基準】

[A]

(a)

空気塊の断面積を S とおく。空気塊には重力，上面からの圧力，下面からの圧力が働いており，静止しているから，空気塊の鉛直方向の釣り合いの式より

$$PS = \left(P + \Delta P\right)S + \rho S \Delta h g \quad \therefore \Delta P = -\rho \Delta h g$$
$$\Leftrightarrow P = P + \Delta P + \rho \Delta h g$$

(答)　$\Delta P = -\rho \Delta h g$

(b)

与えられた断熱過程での熱力学第一法則より

$$0 = MC_{\mathrm{P}} \Delta T - V \Delta P$$
$$\Leftrightarrow \Delta T = \frac{V}{MC_{\mathrm{P}}} \Delta P$$

これに(a)の結果を代入して

$$\Delta T = \frac{V}{MC_{\mathrm{P}}}\left(-\rho \Delta h g\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta T}{\Delta h} = -\frac{\rho V g}{MC_{\mathrm{P}}}$$

$\rho V = M$ であるから

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = -\frac{g}{C_{\mathrm{P}}}$$

(答)　$\dfrac{\Delta T}{\Delta h} = -\dfrac{g}{C_{\mathrm{P}}}$

(c)

[A] 計 20 点

(a)　5 点

＊釣り合いの式に 2 点

＊答に 3 点

(b)　4 点

＊熱力学第一法則に 1 点

＊答に 3 点

(c)　5 点

$a=\dfrac{\Delta T}{\Delta h}$ に $\Delta T=T(h)-T_0$， $\Delta h=h-0$ を代入して

$$\frac{T(h)-T_0}{h-0}=a$$

$$\therefore T(h)=ah+T_0$$

(答) $T(h)=ah+T_0$

(d)

$v_S(h)$ は $T(h)$ の一次関数であり，傾きが b，地表で $T(h)=T_0$， $v_S(h)=v_0$ であるから

$$b=\frac{v_S(h)-v_0}{T(h)-T_0}$$

$$\therefore v_S(h)=b\left\{T(h)-T_0\right\}+v_0$$

が成り立つ。これに(c)の結果を代入して

$$\begin{aligned}v_S(h)&=b\left(ah+T_0-T_0\right)+v_0\\&=abh+v_0\end{aligned}$$

となり，式(X)が示された。

[B]

(e)

層 0 と層 1 の境界面で成り立つ屈折の法則より

$$\frac{\sin\left(90^\circ-\theta_0\right)}{\sin\left(90^\circ-\theta_1\right)}=\frac{v_0}{v_1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta_1}=\frac{v_0}{v_1}$$

(答) $\dfrac{\cos\theta_0}{\cos\theta_1}=\dfrac{v_0}{v_1}$

(f)

層 k における音速 v_k は(d)の式(X)より

$$\begin{aligned}v_k&=v_S(k\Delta h)\\&=abk\Delta h+v_0\end{aligned}$$

(e)と同様に，屈折の法則を層 0 から層 k まで適用することで

＊ $a=\dfrac{\Delta T}{\Delta h}$ に ΔT， Δh を代入して 2 点

＊答に 3 点

(d) 6 点

＊ $v_S(h)$ を $T(h)$ の一次関数で表して 3 点

＊ $T(h)$ を代入して 3 点

[B] 計 30 点

(e) 4 点

＊答に 4 点($\dfrac{\sin\left(90^\circ-\theta_0\right)}{\sin\left(90^\circ-\theta_1\right)}=\dfrac{v_0}{v_1}$ も正解)

(f) 6 点

＊層 k における音速を求めて 2 点

＊屈折の法則に 2 点

$$\frac{\cos\theta_0}{v_0}=\frac{\cos\theta_1}{v_1}=\dots=\frac{\cos\theta_k}{v_k}$$

$$\therefore \frac{\cos\theta_k}{\cos\theta_0}=\frac{v_k}{v_0}$$

これに v_k を代入して

$$\cos\theta_k=\left(1+\frac{abk\Delta h}{v_0}\right)\cos\theta_0$$

(答) $\cos\theta_k=\left(1+\frac{abk\Delta h}{v_0}\right)\cos\theta_0$

＊答に 2 点

($\cos\theta_k=\left(1+\frac{abk\Delta h}{v_0}\right)\sin(90°-\theta_0)$ も正解)

(g) ②

(g) 4 点

(h)

(h) 10 点

(I) ③ (II) ②

＊答に各 2 点×5

(ア) $\frac{2abk\Delta h}{v_0}$ (イ) $\sqrt{1-\frac{2abk\Delta h}{v_0\sin^2\theta_0}}$

(ウ) $\frac{abk\Delta h}{v_0\sin^2\theta_0}$

(i)

(i) 6 点

最高高度で全反射が起きるから，最高高度を $z=h_{max}$ とすると，(f)と同様に屈折の法則より

＊全反射が起きることに 2 点

＊屈折の法則に 2 点

$$\frac{\cos\theta_0}{v_0}=\frac{\cos 0°}{v_0+bch_{max}}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{bch_{max}}{v_0}=\frac{1}{\cos\theta_0}$$

$$\therefore h_{max}=\frac{v_0}{bc}\left(\frac{1}{\cos\theta_0}-1\right)$$

(答) $\frac{v_0}{bc}\left(\frac{1}{\cos\theta_0}-1\right)$

＊答に 2 点

($\frac{v_0}{bc}\left\{\frac{1}{\sin(90°-\theta_0)}-1\right\}$ も正解)