２０２０年　第一回東工大本番レベル模試・物理

解答・解説・採点基準

全３問　１２０分　１５０点満点

$\boxed{\text{I}}$ （５０点）

【解答・採点基準】

<table>
<tr><td>

[A]

(a)

$\boxed{\text{ア}}$ $\dfrac{m_1 v_1}{m_1 + M}$

$\boxed{\text{イ}}$ $v_2 - \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + M}$

$\boxed{\text{ウ}}$ $\dfrac{m_1 v_1}{m_1 + M}$

$\boxed{\text{エ}}$ $-\dfrac{m_1 L}{m_1 + M}$

$\boxed{\text{オ}}$ $\dfrac{m_1 L}{m_1 + M}$

[B]

(b)

小球 1 の運動方程式：$m_1 a_1 = -k\left(x_1 - X\right)$

台の運動方程式　　　：$MA = -k\left(X - x_1\right)$

(c)

重心の座標の定義より，求める式は

$$\frac{m_1 x_1 + MX}{m_1 + M}$$

台と小球 1 の速度をそれぞれ V, v_1 とすると，運動量保存則より

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + MV = 0$$

</td><td>

[A]　5 点

(a)　5 点(1 点×5)

[B]　26 点

(b)　6 点

*答に 3 点×2

(c)　7 点

*運動量保存則の立式に 1 点

*答に 3 点×2

</td></tr>
</table>

$$\therefore \frac{m_1 v_1 + MV}{m_1 + M} = -\frac{m_2 v_2}{m_1 + M}$$

(答) x 座標：$\dfrac{m_1 x_1 + MX}{m_1 + M}$，速度：$-\dfrac{m_2 v_2}{m_1 + M}$

(d)

系 S の重心から見た台の重心の相対 x 座標は

$$X - \frac{m_1 x_1 + MX}{m_1 + M} = \frac{m_1}{m_1 + M}(X - x_1)$$

これと(b)より

$$A = -\frac{m_1 + M}{m_1 M} k \left(X - \frac{m_1 x_1 + MX}{m_1 + M} \right)$$

よって，系 S から見た台の重心の相対加速度が A であることから，求める周期は

$$2\pi \sqrt{\frac{m_1 M}{k(m_1 + M)}}$$

(答) $2\pi \sqrt{\dfrac{m_1 M}{k(m_1 + M)}}$

(d)　6 点

＊系 S の重心が振動中心となる運動方程式が導出できて 3 点

＊答に 3 点

(e)

台と小球 2 が衝突するまでの間，系 S には外力ははたらかないので，系 S の重心の x 座標は $\dfrac{m_1 d}{m_1 + M}$ である。(d)より，台は系 S の重心を振動中心とする単振動をするので，台の初期位置から振幅は $\dfrac{m_1 d}{m_1 + M}$ である。よって，台と小球 2 が衝突しなければ台の重心の x 座標は 0 と $\dfrac{2m_1 d}{m_1 + M}$ の間を移動する。よって，

$$d' = \frac{2m_1 d}{m_1 + M}$$

(答) $d' = \dfrac{2m_1 d}{m_1 + M}$

(e)　7 点

＊系 S の重心の x 座標が計算できて 1 点

＊台の単振動の振幅に 3 点

＊答に 3 点

【(e)の別解】

d' が最大となるのはばねが最も縮んだときに台と小球 2 が衝突するときである。このとき，台と小球 1 の速度は等しく，運

〔別解〕　7 点

＊ばねの縮みの最大値に 3 点

動量保存則より，その値はそれぞれ0である。よって，エネルギー保存則より，ばねの縮みの最大値は d である。台と小球2が衝突するときの台の重心の x 座標を X' とすると，このときの小球1の x 座標は $X'-d$ である。さらに，台と小球2が初めて衝突するまでの間，系Sには外力が働かないため，系Sの重心の x 座標は $\dfrac{m_1 d}{m_1+M}$ で一定であるから

$$\frac{m_1(X'-d)+MX'}{m_1+M}=\frac{m_1 d}{m_1+M}$$

$$\therefore X'=\frac{2m_1 d}{m_1+M}$$

このとき

$$x_2=-L+X'=-L+\frac{2m_1 d}{m_1+M}$$

を満たすから

$$d'=\frac{2m_1 d}{m_1+M}$$

(答)　$d'=\dfrac{2m_1 d}{m_1+M}$

[C]

(f)

ばねが自然長のとき $x_1=X$ である。衝突の直前までは系Sの重心の x 座標は不変だから(c)より

$$\frac{m_1 x_1+MX}{m_1+M}=X=\frac{m_1 d}{m_1+m_1}=\frac{d}{2}$$

すなわち，衝突時の台の重心の x 座標は $\dfrac{d}{2}$ である。このときに台と小球2が衝突するので

$$x_2=-L+\frac{d}{2}$$

(答)　$x_2=-L+\dfrac{d}{2}$

(g)

*系Sの重心のx座標が計算できて1点

*答に3点

[C]　19点

(f)　6点

*衝突時の台の重心のx座標に3点

*答に3点

(g)　6点

台と小球 1 の速度をそれぞれ V, v_1 とすると，エネルギー保存則と運動量保存則より

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^{\ 2} = \frac{1}{2}kd^2 \\ m_1V + m_1v_1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} v_1 = -d\sqrt{\frac{k}{2m_1}} \\ V = d\sqrt{\frac{k}{2m_1}} \end{cases} \quad (\because V > 0)$$

(答) $V = d\sqrt{\frac{k}{2m_1}}$

*エネルギー保存則と運動量保存則が立式できて 3 点

*答に 3 点

【(g)の別解】

〔別解〕 6 点

(d), (e)より，台は角振動数 $\sqrt{\frac{2k}{m_1}}$，振幅は $\frac{d}{2}$ の単振動をするから

$$V = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{2k}{m_1}} = d\sqrt{\frac{k}{2m_1}}$$

(答) $V = d\sqrt{\frac{k}{2m_1}}$

*台の単振動の角振動数と振幅に 3 点

*答に 3 点

(h)

(h) 7 点

$M = m_2$ なので，一回目の衝突後の小球 2 の速度は V である。衝突後に，ばねが再び自然長となるのは単振動の半周期後である。(d)より，それにかかる時間は $\pi\sqrt{\frac{m_1}{2k}}$ である。二回目の衝突直前においてばねは自然長なので系 S の重心から見た，台の位置は一回目の衝突時と同じである。したがって，小球 2 が移動した距離は $2L$ に系 S の重心の変位を加えたものである。すなわち，(c)より

$$V\cdot\pi\sqrt{\frac{m_1}{2k}} = 2L - \frac{1}{2}V\cdot\pi\sqrt{\frac{m_1}{2k}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot d\sqrt{\frac{k}{2m_1}} = \frac{2L}{\pi}\sqrt{\frac{2k}{m_1}}$$

$$\therefore d = \frac{8}{3\pi}L$$

(答) $d = \frac{8}{3\pi}L$

*一回目の衝突後の小球 2 の速度に 1 点

*一回目の衝突から二回目の衝突にかかる時間に 1 点

*立式に 1 点

*答に 4 点

２０２２年　第一回東工大本番レベル模試・物理

解答・解説・採点基準

全３問　１２０分　１５０点満点

$\boxed{2}$（５０点）

【解答・採点基準】

〔A〕

(a)

点電荷 Q と仮想的な点電荷 $-Q$ が点 $(0,\ y,\ z)$ に作る電位はそれぞれ $k\dfrac{Q}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}$, $k\dfrac{-Q}{\sqrt{b^2+y^2+z^2}}$ である。よって，点 $(0,\ y,\ z)$ における電位 V は

$$V = k\frac{Q}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}} + k\frac{-Q}{\sqrt{b^2+y^2+z^2}}$$

$$= kQ\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+y^2+z^2}}\right)$$

(答)　$kQ\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{b^2+y^2+z^2}}\right)$

(b)

(a)で $V=0$ とすると

$$kQ\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+y^2+z^2}}\right) = 0$$

$kQ>0$ より

$$\sqrt{a^2+y^2+z^2} = \sqrt{b^2+y^2+z^2}$$
$$\therefore a^2 = b^2$$

$a>0,\ b<0$ より

$$b=-a$$

(答)　$b=-a$

〔A〕18 点

(a) 6 点

*点電荷 Q と仮想的な点電荷 $-Q$ が点 $(0,\ y,\ z)$ に作る電位に各 1 点×2

*答に 4 点

(b) 6 点

*(a)の結果を利用する方針に 2 点

*答に 4 点

(c) 点電荷 Q は仮想的な点電荷 $-Q$ の向きに力を受けるので， $F_y=0,\ F_z=0$ である。F_x は $F_x=k\dfrac{Q\cdot(-Q)}{\{a-(-a)\}^2}=-\dfrac{kQ^2}{4a^2}$ （答）$F_x=-\dfrac{kQ^2}{4a^2},\ F_y=0,\ F_z=0$	(c) 6 点 *答に各 2 点×3
〔B〕	〔B〕23 点
(d)	(d) 8 点
(ア) $k\dfrac{Q}{r_1}+k\dfrac{Q'}{r_2}=0$	(ア) 2 点
(イ) $\sqrt{d^2+R^2-2dR\cos\theta}$	(イ) 2 点
(ウ) $\sqrt{d'^2+R^2-2d'R\cos\theta}$	(ウ) 2 点
(エ) $-Q\sqrt{\dfrac{d'^2+R^2-2d'R\cos\theta}{d^2+R^2-2dR\cos\theta}}$	(エ) 2 点
(e) 式(I)に $\theta=0$ を代入すると $Q'=-Q\dfrac{R-d'}{d-R}\quad(\because R-d'>0,\ d-R>0)$ また，式(I)に $\theta=\pi$ を代入すると $Q'=-Q\dfrac{R+d'}{d+R}\quad(\because R+d'>0,\ d+R>0)$ 以上より $-Q\dfrac{R-d'}{d-R}=-Q\dfrac{R+d'}{d+R}$ $\therefore d'=\dfrac{R^2}{d}$ （答）$d'=\dfrac{R^2}{d}$	(e) 5 点 * $\theta=0$ の時と $\theta=\pi$ の時の Q' の値に各 1 点×2 *答に 3 点
(f) ⑤	(f) 4 点

(g)

求める力の大きさは

$$\left| k\frac{QQ'}{(d-d')^2} \right| = k\frac{\frac{R}{d}Q^2}{\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2}$$

$$= \frac{dR}{\left(d^2-R^2\right)^2}kQ^2$$

(答) $\dfrac{dR}{\left(d^2-R^2\right)^2}kQ^2$

(g) 6 点

***立式に 2 点**

***答に 4 点**

〔C〕

〔C〕 9 点

(h)

(h) 9 点

(オ) $\dfrac{d_\alpha R}{\left({d_\alpha}^2-R^2\right)^2}kQ^2\sin(\alpha+\beta)$

(オ) 3 点

(カ) $\dfrac{LR}{\left\{(L-\ell)^2-R^2\right\}^2}kQ^2$

(カ) 3 点

(キ) $\dfrac{2\pi\left\{(L-\ell)^2-R^2\right\}}{Q}\sqrt{\dfrac{m\ell}{kLR}}$

(キ) 3 点

２０２２年　第１回東工大本番レベル模試・物理

解答・解説・採点基準

全３問　１２０分　１５０点満点

3 （５０点）

【解答・採点基準】

解答	採点基準
[A]	[A] 12 点
(a)	(a) 4 点
ピストンにはたらく力のつり合いより $kd_A + PS = mg$ $\therefore d_A = \dfrac{mg - PS}{k}$	＊つり合いの式に 2 点
(答) $d_A = \dfrac{mg - PS}{k}$	＊答に 2 点
(b)	(b) 8 点
状態 A-2 におけるピストンと床の間の気体の圧力を P' とする。ピストンにはたらく力のつり合いの式とボイル・シャルルの法則を連立して $\begin{cases} P'S = PS + k\Delta L \\ \dfrac{P'S(L+\Delta L)}{3T} = \dfrac{PSL}{T} \end{cases}$ $\Rightarrow PS + k\Delta L = \dfrac{3L}{L+\Delta L} PS$ $\Leftrightarrow k\Delta L^2 + 3kL\Delta L - 4kL^2 = 0$ $\therefore \Delta L = L \quad (\because L + \Delta L > 0)$	＊つり合いの式に 3 点 ＊ボイル・シャルルの法則に 3 点
(答) $\Delta L = L$	＊答に 2 点
[B]	[B] 16 点
(c)	(c) 4 点
ピストンにはたらく力のつり合いより	＊つり合いの式に 2 点

$$kd_B + P_0 S = mg$$
$$\therefore d_B = \frac{mg - P_0 S}{k}$$

(答) $d_B = \dfrac{mg - P_0 S}{k}$

＊答に 2 点

(d)

(d) 6 点

状態 B-2 においてばねの自然長からの伸びは $d_B + x$，水圧は $P_0 + \rho g x$ であるから

＊ばねの弾性力に 2 点

＊水により受ける力に 2 点

$$F = mg - k(d_B + x) - (P_0 + \rho g x)S$$
$$= -(k + \rho g S)x$$

(答) $F = -(k + \rho g S)x$

＊答に 2 点

(e)

(e) 6 点

ピストンの鉛直方向下向きの加速度を a とすると運動方程式より

＊運動方程式に 2 点

$$ma = -(k + \rho g S)x$$
$$\therefore a = -\frac{k + \rho g S}{m}x$$

求める時間は単振動の周期の半分だから

＊単振動の周期に 2 点

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m}{k + \rho g S}} = \pi \sqrt{\frac{m}{k + \rho g S}}$$

(答) $\pi \sqrt{\dfrac{m}{k + \rho g S}}$

＊答に 2 点

[C]

[C] 22 点

(f)

(f) 4 点

ピストンにはたらく力のつり合いより

＊つり合いの式に 2 点

$$kd_C + P_0 S = mg + P_0 S$$
$$\therefore d_C = \frac{mg}{k}$$

(答) $d_C = \dfrac{mg}{k}$

＊答に 2 点

(g)

(g) 8 点

ばねはつり合いの位置から $\Delta L'$ 伸びたから

$$W_1 = \frac{1}{2}k\Delta L'^2$$

(d)より水槽中の水はばね定数 ρgS のばねと同様の復元力を与えるから

$$W_2 = \frac{1}{2}\rho gS\Delta L'^2$$

ピストンより上の部分の気体の物質量を n，気体定数を R とすると

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{3}{2}nR(3T - T)\\ &= 3nRT\end{aligned}$$

理想気体の状態方程式 $P_0SL' = nRT$ を用いて

$$\Delta U = 3P_0SL'$$

(答) $W_1 = \frac{1}{2}k\Delta L'^2$， $W_2 = \frac{1}{2}\rho gS\Delta L'^2$， $\Delta U = 3P_0SL'$

(h)

状態 C-2 におけるピストンより上の部分の気体の圧力を P'' とする。ボイル・シャルルの法則より

$$\frac{P''S\left(L' + \Delta L'\right)}{3T} = \frac{P_0SL'}{T}$$
$$\therefore P'' = \frac{3L'}{L' + \Delta L'}P_0$$

ピストンにはたらく力のつり合いの式より

$$P''S + mg = \left(P_0 + \rho g\Delta L'\right)S + k\left(d_C + \Delta L'\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3L'}{L' + \Delta L'}P_0S = P_0S + \left(\rho gS + k\right)\Delta L'$$
$$\Leftrightarrow 2\Delta L'^2 + 3\Delta L'L' - 2L'^2 = 0$$
$$\therefore \Delta L' = \frac{L'}{2} \quad \left(\because L' + \Delta L' > 0\right)$$

(g)の式に結果を代入して

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1}{2}k\Delta L'^2 + \frac{1}{2}\rho gS\Delta L'^2 + P_0S\Delta L' + 3P_0SL'\\ &= \frac{1}{4}kL'^2 + \frac{1}{2}kL'^2 + 3kL'^2\\ &= \frac{15}{4}kL'^2\end{aligned}$$

(答) $\Delta L' = \frac{L'}{2}$， $Q = \frac{15}{4}kL'^2$

＊ ΔU を求める式に 2 点

＊答に 2 点×3

(h) 10 点

＊ボイル・シャルルの法則に 2 点

＊つり合いの式に 2 点

＊(g)のエネルギー保存則を用いて 2 点

＊答に 2 点×2