２０２３年　第２回東工大本番レベル模試・物理

解答・解説・採点基準

全３問　１２０分　１５０点満点

$\boxed{\text{I}}$ （５０点）

【解答・採点基準】

[A]

(a)

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mV^2 + mg\left(\frac{x^2}{L}\right) = mgL$$

$$\therefore V = \sqrt{2gL\left\{1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}}$$

（答） $V = \sqrt{2gL\left\{1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}}$

(b)

(ア) $\dfrac{2}{L}$

(イ) $\dfrac{L}{\sqrt{L^2+4x^2}}V$ （$\dfrac{V}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L}\right)^2}}$ なども同じ）

(ウ) $\dfrac{2x}{\sqrt{L^2+4x^2}}V$ （$\dfrac{2x}{L\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L}\right)^2}}V$ なども同じ）

(X) ③

(c) ②

[A]　20点

(a)　6点

＊エネルギー保存則の立式に4点

＊答に2点

(b)

(ア) 2点

(イ) 2点

＊V に(a)の正しい答えを代入していた場合は1点

(ウ) 2点

＊V に(a)の正しい答えを代入していた場合は1点

(X) 1点

(c) 7点

[B]

(d)

x 軸を針金に合わせて角速度 ω で回転させたものを x' 軸とし，θ と同様に θ' を定義する。観測者 K から見た針金に沿った方向の力のつり合いより

$$0 = mx'\omega_0^2\cos\theta' - mg\sin\theta'$$

$$\omega_0^2 = \tan\theta'\cdot\frac{g}{x'} = \frac{2g}{L}\left(\because \tan\theta' = \frac{2x'}{L}\right)$$

$$\therefore \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

(答) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2g}{L}}$

(e)

小球が受ける針金に沿った方向の復元力 F_1 は，原点 O から遠ざかる向きを正とすると

$$F_1 = mx'\omega_1^2\cos\theta' - mg\sin\theta'$$

$\theta' \fallingdotseq \sin\theta' \fallingdotseq \tan\theta'$ の近似を用いて整理すると

$$F_1 = -m\left(\frac{2g}{L} - \omega_1^2\right)x'$$

よって単振動の角振動数 Ω は $\Omega = \sqrt{\dfrac{2g}{L} - \omega_1^2}$ であるから，

周期は

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2g}{L} - \omega_1^2}}$$

(答) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2g}{L} - \omega_1^2}}$

[B]　30 点

(d)　8 点

＊角度を定義し，針金に沿った方向の力のつり合いを立てる方針が見られれば 2 点

＊つり合いの立式に 2 点

＊ $\tan\theta' = \dfrac{2x'}{L}$ に言及または式変形に用いて 2 点

（または $\omega_0^2 = \dfrac{2g}{L}$ を得て 2 点）

＊答に 2 点

(e)　6 点

＊復元力を立式して 2 点

＊単振動の式を導いて 2 点

＊答に 2 点

★答が正しければ過程に依らず満点(6 点)を与える

(e)[別解]

針金から受ける垂直抗力の大きさを N' とする。加速度の x' 成分を α'_x とすると，運動方程式より

$$\text{水平方向：}\ m\alpha'_x = mx'\omega_1^2 - N'\frac{2x'}{\sqrt{L^2+4x'^2}}$$

$$\text{鉛直方向：}\ m\cdot 0 = N'\frac{L}{\sqrt{L^2+4x'^2}} - mg$$

2 式を連立して整理すると，

$$\alpha'_x = -\left(\frac{2g}{L}-\omega_1^2\right)x'$$

を得る。よって単振動の角振動数 Ω は $\Omega = \sqrt{\frac{2g}{L}-\omega_1^2}$ であるから，周期は

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{L}-\omega_1^2}}$$

(答) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{L}-\omega_1^2}}$

(f) $W = 2mgL$

(g)

力学的エネルギー変化と仕事の関係より

$$\left(\frac{1}{2}mV'^2 + mgL\right) - 0 = W$$

$$\therefore \frac{1}{2}mV'^2 = mgL$$

$$\therefore V' = \sqrt{2gL}$$

(答) $V' = \sqrt{2gL}$

(e)[別解]　6 点

＊運動方程式に各 1 点×2

（θ' を用いて表しても可。$\theta' > 0$ の範囲に限定して立式した場合も可）

＊単振動の式を導いて 2 点

＊答に 2 点

★答が正しければ過程に依らず満点(6 点)を与える

(f)　4 点

(g)　5 点

＊エネルギー保存則の立式に 3 点

（W に(f)の間違った値を代入していても可）

＊答に 2 点

(h)

$y=0$ における小球の速度の y 成分を $-u$ とする。エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}m\left(V'\frac{2}{\sqrt{1+2^2}}\right)^2+mgL$$
$$\therefore u=\sqrt{\frac{18}{5}gL}$$

である。よって $\tan\varphi$ は

$$\tan\varphi=\frac{u}{\sqrt{\left(2\sqrt{gL}\right)^2+\left(\sqrt{2gL}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{\frac{18}{5}}}{\sqrt{\frac{22}{5}}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

であるから，$\frac{1}{\sqrt{3}}<\tan\varphi<1$ より $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{4}$ を満たす。したがって③が正しい。

(答) ③

(採点基準のための補足)

$\sin\varphi$, $\cos\varphi$ は以下の通り計算できる。

$$\sin\varphi=\frac{u}{\sqrt{\left(2\sqrt{gL}\right)^2+\left(\sqrt{2gL}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+u^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{\left(2\sqrt{gL}\right)^2+\left(\sqrt{2gL}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}{\sqrt{\left(2\sqrt{gL}\right)^2+\left(\sqrt{2gL}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+u^2}}=\frac{\sqrt{55}}{10}$$

(h)　7点

＊エネルギー保存則の立式に2点

＊ $\tan\varphi$ の立式に2点

（ $\cos$ や $\sin$ を正しく立式しても可。）

（上記2項目の過程がなくても，三角比の正しい値が得られれば4点）

＊答に3点

（三角比の正しい値が書かれていない場合は合っていても加点なし）