２０２３年　第２回東工大本番レベル模試・物理

解答・解説・採点基準

全３問　１２０分　１５０点満点

Ⅰ　（５０点）

【解答・採点基準】

[A]

(a)

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mV^2 + mg\left(\frac{x^2}{L}\right) = mgL$$

$$\therefore V = \sqrt{2gL\left\{1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}}$$

(答)　$V = \sqrt{2gL\left\{1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}}$

(b)

(ア)　$\frac{2}{L}$

(イ)　$\frac{L}{\sqrt{L^2+4x^2}}V$　（$\frac{V}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L}\right)^2}}$ なども同じ）

(ウ)　$\frac{2x}{\sqrt{L^2+4x^2}}V$　（$\frac{2x}{L\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L}\right)^2}}V$ なども同じ）

(X)　③

(c)　②

[A]　20 点

(a)　6 点

＊エネルギー保存則の立式に 4 点

＊答に 2 点

(b)

(ア)　2 点

(イ)　2 点

＊V に(a)の正しい答えを代入していた場合は 1 点

(ウ)　2 点

＊V に(a)の正しい答えを代入していた場合は 1 点

(X)　1 点

(c)　7 点

[B]

(d)

x 軸を針金に合わせて角速度 ω で回転させたものを x' 軸とし，θ と同様に θ' を定義する。観測者 K から見た針金に沿った方向の力のつり合いより

$$0 = mx'\omega_0^2 \cos\theta' - mg\sin\theta'$$

$$\omega_0^2 = \tan\theta' \cdot \frac{g}{x'} = \frac{2g}{L} \left(\because \tan\theta' = \frac{2x'}{L} \right)$$

$$\therefore \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

(答) $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

(e)

小球が受ける針金に沿った方向の復元力 F_1 は，原点 O から遠ざかる向きを正とすると

$$F_1 = mx'\omega_1^2 \cos\theta' - mg\sin\theta'$$

$\theta' \fallingdotseq \sin\theta' \fallingdotseq \tan\theta'$ の近似を用いて整理すると

$$F_1 = -m\left(\frac{2g}{L} - \omega_1^2\right)x'$$

よって単振動の角振動数 Ω は $\Omega = \sqrt{\frac{2g}{L} - \omega_1^2}$ であるから，周期は

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{L} - \omega_1^2}}$$

(答) $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{L} - \omega_1^2}}$

[B] 30 点

(d) 8 点

＊角度を定義し，針金に沿った方向の力のつり合いを立てる方針が見られれば 2 点

＊つり合いの立式に 2 点

＊ $\tan\theta' = \frac{2x'}{L}$ に言及または式変形に用いて 2 点

（または $\omega_0^2 = \frac{2g}{L}$ を得て 2 点）

＊答に 2 点

(e) 6 点

＊復元力を立式して 2 点

＊単振動の式を導いて 2 点

＊答に 2 点

★答が正しければ過程に依らず満点(6 点)を与える

(e)[別解]

針金から受ける垂直抗力の大きさを N' とする。加速度の x' 成分を α'_x とすると，運動方程式より

水平方向： $m\alpha'_x = mx'\omega_1^2 - N'\dfrac{2x'}{\sqrt{L^2+4x'^2}}$

鉛直方向： $m\cdot 0 = N'\dfrac{L}{\sqrt{L^2+4x'^2}} - mg$

2 式を連立して整理すると，

$$\alpha'_x = -\left(\frac{2g}{L} - \omega_1^2\right)x'$$

を得る。よって単振動の角振動数 Ω は $\Omega = \sqrt{\dfrac{2g}{L} - \omega_1^2}$ であるから，周期は

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2g}{L} - \omega_1^2}}$$

(答) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2g}{L} - \omega_1^2}}$

(e)[別解] 6 点

＊運動方程式に各 1 点×2

（θ' を用いて表しても可。$\theta' > 0$ の範囲に限定して立式した場合も可）

＊単振動の式を導いて 2 点

＊答に 2 点

★答が正しければ過程に依らず満点(6 点)を与える

(f) $W = 2mgL$

(g)

力学的エネルギー変化と仕事の関係より

$$\left(\frac{1}{2}mV'^2 + mgL\right) - 0 = W$$

$$\therefore \frac{1}{2}mV'^2 = mgL$$

$$\therefore V' = \sqrt{2gL}$$

(答) $V' = \sqrt{2gL}$

(f) 4 点

(g) 5 点

＊エネルギー保存則の立式に 3 点

（W に(f)の間違った値を代入していても可）

＊答に 2 点

(h)

$y=0$ における小球の速度の y 成分を $-u$ とする。エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}m\left(V'\frac{2}{\sqrt{1+2^2}}\right)^2+mgL$$

$$\therefore u=\sqrt{\frac{18}{5}gL}$$

である。よって $\tan\varphi$ は

$$\tan\varphi=\frac{u}{\sqrt{\left(2\sqrt{gL}\right)^2+\left(\sqrt{2gL}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{\frac{18}{5}}}{\sqrt{\frac{22}{5}}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

であるから，$\frac{1}{\sqrt{3}}<\tan\varphi<1$ より $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{4}$ を満たす。したがって③が正しい。

(答) ③

(採点基準のための補足)

$\sin\varphi$, $\cos\varphi$ は以下の通り計算できる。

$$\sin\varphi=\frac{u}{\sqrt{\left(2\sqrt{gL}\right)^2+\left(\sqrt{2gL}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+u^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{\left(2\sqrt{gL}\right)^2+\left(\sqrt{2gL}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}{\sqrt{\left(2\sqrt{gL}\right)^2+\left(\sqrt{2gL}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+u^2}}=\frac{\sqrt{55}}{10}$$

(h)　7 点

＊エネルギー保存則の立式に 2 点

＊ $\tan\varphi$ の立式に 2 点

（cos や sin を正しく立式しても可。）

（上記 2 項目の過程がなくても，三角比の正しい値が得られれば 4 点）

＊答に 3 点

（三角比の正しい値が書かれていない場合は合っていても加点なし）

2 （５０点）

【解答・採点基準】

[A]	[A] 14 点
(a) nl	(a) 4 点
(b)	(b) 4 点
アンペールの法則より	＊アンペールの法則に 2 点
$Hl = nlI$ $\therefore H = nI$	
（答） $H = nI$	＊答に 2 点
(c)	(c) 6 点
鎖交磁束数は	＊鎖交磁束数の式に 2 点
$\Phi = nl \cdot \mu_0 H \cdot S$ $= \mu_0 n^2 SlI$	
$\Phi = LI$ であるから	
$L = \mu_0 n^2 Sl$	
（答） $\Phi = \mu_0 n^2 SlI$， $L = \mu_0 n^2 Sl$	＊答に 2 点×2
[B]	[B] 18 点
(d)（ア） $\frac{B_0}{\mu_0}$ （イ） $\frac{B_0}{\mu}$ （ウ） $\frac{B_0}{\mu_0}(l-x)$ （エ） $\frac{B_0}{\mu}x$	(d) 12 点（各 2 点×6）
（オ） nlI_0 （カ） $\frac{\mu_0 \mu nlI_0}{\mu(l-x)+\mu_0 x}$	
(e)	(e) 6 点
(c)と同様に自己インダクタンスの定義から	＊自己インダクタンスの定義式に 4 点
$nlB_0 S = L_0 I_0$ $\therefore L_0 = \frac{\mu l}{\mu(l-x)+\mu_0 x}L$	
（答） $L_0 = \frac{\mu l}{\mu(l-x)+\mu_0 x}L$	＊答に 2 点
[C]	[C] 18 点
(f)	(f) 6 点
コイルに蓄えられるエネルギーの式より	＊エネルギーの式

$$\frac{1}{2}L_0 I_0^2 = \frac{\Phi_0^2}{2L_0}$$
$$= \frac{\mu(l-x)+\mu_0 x}{2\mu l L}\Phi_0^2$$

(答) $\frac{\mu(l-x)+\mu_0 x}{2\mu l L}\Phi_0^2$

(g)

コイルに蓄えられるエネルギーの変化量が外力のした仕事に等しく

$$\frac{\mu\{l-(x+\Delta x)\}+\mu_0(x+\Delta x)}{2\mu l L}\Phi_0^2 - \frac{\mu(l-x)+\mu_0 x}{2\mu l L}\Phi_0^2$$
$$= -\frac{(\mu-\mu_0)\Phi_0^2}{2\mu l L}\Delta x$$

(答) $-\frac{(\mu-\mu_0)\Phi_0^2}{2\mu l L}\Delta x$

(h)

外力を上向きを正として F とすると(g)より

$$F\Delta x = -\frac{(\mu-\mu_0)\Phi_0^2}{2\mu l L}\Delta x$$
$$\therefore F = -\frac{(\mu-\mu_0)\Phi_0^2}{2\mu l L}$$

力のつり合いより

$$F + f = 0$$
$$\therefore f = \frac{(\mu-\mu_0)\Phi_0^2}{2\mu l L}$$

(答) $f = \frac{(\mu-\mu_0)\Phi_0^2}{2\mu l L}$

($\frac{1}{2}L_0 I_0^2$)に 4 点

＊答に 2 点

(g) 6 点

＊エネルギーの変化量が外力のした仕事に等しいという方針に 4 点

＊答に 2 点

(h) 6 点

＊外力を求めて 2 点

＊力のつり合いの式に 2 点

＊答に 2 点

3 （５０点）

【解答・採点基準】

[A]	[A] 13 点
(a)	(a) 6 点
内部エネルギーの変化 ： $\frac{3}{2}R\left(T_f - T_1\right)$	＊内部エネルギーの変化，気体の仕事に各 3 点
気体の仕事 ： $R\left(T_f - T_1\right)$	
(b)	(b) 7 点
容器 0 と 1 を一つの系とみれば外部との熱のやり取りはないので容器 0, 1 一体系での熱力学第一法則より	＊熱力学第一法則の立式に 4 点
$0 = \frac{3}{2}R\left(T_f - T_0\right) + \frac{3}{2}R\left(T_f - T_1\right) + R\left(T_f - T_1\right)$	＊答に 3 点
$\therefore T_f = \frac{3T_0 + 5T_1}{8}$	
（答） $\frac{3T_0 + 5T_1}{8}$	
[B]	[B] 37 点
(c)	(c) 6 点
ピストンに関して力のつり合いの式より	＊力のつり合いの式に 3 点
$p_1S + 2p_0S = 2p_2S + p_0S$	＊答に 3 点
$\therefore p_2 = \frac{1}{2}\left(p_0 + p_1\right)$	
（答） $\frac{1}{2}\left(p_0 + p_1\right)$	
(d)	(d) 7 点
容器 1 内の気体がした仕事は力 p_1S がした仕事である。容器 2 内の気体がされた仕事は同様に $2p_2S = p_0S + p_1S$ がした仕事の逆符号に等しい。力 p_0S がした仕事は定圧変化と等価で $p_0\Delta V$ であり，力 p_1S がした仕事は W_1 なので容器 2 内の気体がした仕事は $-\left(W_1 + p_0\Delta V\right)$ となる。よって求める仕事は $W_1 + p_0\Delta V$ となる。	＊力 p_0S がした仕事に 3 点 ＊力 p_1S がした仕事に 2 点 ＊答に 2 点

(答) $W_1 + p_0\Delta V$

(e)

三つの容器を一つの系とみれば外部との熱のやり取りはないので，変化後の容器 2 内の気体の温度を T' とおくと三つの容器一体系で熱力学第一法則より

$$0 = \frac{3}{2}R\left(\frac{1}{2}T_2 - T_0\right) + \frac{3}{2}R\left(\frac{1}{2}T_2 - T_1\right) + W_1 + R\left(T' - T_2\right) - W_1 - p_0\Delta V$$

$$\therefore T' = T_0 + T_1 + \frac{2p_0\Delta V}{3R}$$

（答） $T_0 + T_1 + \dfrac{2p_0\Delta V}{3R}$

(f)

十分時間が経過した後の容器 2 の気体の圧力は

$$\frac{1}{2}\left(p_0 + p_1'\right)$$

であるので変化後の容器 2 内の気体の体積を V_2' とおくとポアソンの法則より

$$\frac{1}{2}\left(p_0 + p_1\right)\left(V_2' + 2\Delta V\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2}\left(p_0 + p_1'\right)V_2'^{\frac{5}{3}}$$

となるのでこれを解いて

$$V_2' = \frac{2\Delta V}{\left(\dfrac{p_0 + p_1'}{p_0 + p_1}\right)^{\frac{3}{5}} - 1}$$

（答） $\dfrac{2\Delta V}{\left(\dfrac{p_0 + p_1'}{p_0 + p_1}\right)^{\frac{3}{5}} - 1}$

(g)

ヒーターで温度が一定に保たれるとき，変化後の容器 1 内の気体の圧力を p_T とするとボイルの法則より

$$\frac{1}{2}\left(p_0 + p_1\right)\left(V_2' + 2\Delta V\right) = \frac{1}{2}\left(p_0 + p_T\right)V_2'$$

となる。(f)で求めた断熱変化の式と合わせて

(e) 7 点

＊熱力学第一法則を立式出来て 3 点

＊答に 4 点

(f) 7 点

＊十分時間が経過した後の容器 2 内の気体の圧力を導いて 2 点

＊ポアソンの法則を立式して 3 点

＊答に 2 点

(g) 10 点

＊ボイルの法則に 2 点

＊

$$\left(V_2' + 2\Delta V\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{p_0 + p_T}{p_0 + p_1'}V^{-\frac{2}{3}}$$

を導いて 2 点

$$\left(V_2' + 2\Delta V\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{p_0 + p_T}{p_0 + p_1'} V_2'^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \frac{p_0 + p_T}{p_0 + p_1'} = \left(1 + \frac{2\Delta V}{V_2'}\right)^{-\frac{2}{3}} < 1$$

なので $p_T < p_1'$ となる。また，$0 < \Delta V$ を満たすすべての ΔV に対してボイルの法則の式と合わせて $p_1 < p_T < p_1'$ が成り立つので，これを満たす選択肢は(ア)のみである。

（答）(ア)

＊

$$\frac{p_0 + p_T}{p_0 + p_1'} = \left(1 + \frac{2\Delta V}{V_2'}\right)^{-\frac{2}{3}} < 1$$

から $p_T < p_1'$ を導いて 3 点

＊答えに 3 点