２０２４年　第一回東工大本番レベル模試・数学

解答・解説・採点基準

全５問　１２０分　３００点満点

Ｉ　（６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

n を 0 以上の整数とし，$\left[\frac{m}{4}\right]=n$ とおく。(A)このとき，

$$n \leqq \frac{m}{4} < n+1$$

より

$$2n \leqq \frac{m}{2} < 2n+2$$

となるため，$\left[\frac{m}{2}\right]=2n,\ 2n+1$(A)である。また，異なる3つの数

$\left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{3}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$ がこの順に等差数列となるため，

$$2\left[\frac{m}{3}\right]=\left[\frac{m}{4}\right]+\left[\frac{m}{2}\right] \text{(B)} \qquad \cdots ①$$

である。

[1] $\left[\frac{m}{2}\right]=2n$ のとき

①より

$$\left[\frac{m}{3}\right]=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{m}{4}\right]+\left[\frac{m}{2}\right]\right)$$
$$=\frac{1}{2}(n+2n)$$
$$=\frac{3}{2}n \text{(C)}$$

60 点

(A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)(H)(I)

(A)　$\left[\frac{m}{4}\right]=n$ のとき

$\left[\frac{m}{2}\right]=2n,\ 2n+1$ を求めて‥5 点

(B)　$\left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{3}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$ がこの順で等差数列となる条件を言い換えて‥5 点

・$\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m}{3}\right]=\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{m}{4}\right]$ なども可

(C)　$\left[\frac{m}{2}\right]=2n$ のとき $\left[\frac{m}{3}\right]=\frac{3}{2}n$ を求めて‥5 点

である。ここで，$\left(\left[\dfrac{m}{4}\right], \left[\dfrac{m}{3}\right], \left[\dfrac{m}{2}\right]\right)=\left(n, \dfrac{3}{2}n, 2n\right)$であるから，

$$\begin{cases} n \leqq \dfrac{m}{4} < n+1 \\ \dfrac{3}{2}n \leqq \dfrac{m}{3} < \dfrac{3}{2}n+1 \\ 2n \leqq \dfrac{m}{2} < 2n+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4n \leqq m < 4n+4 & \cdots ② \\ \dfrac{9}{2}n \leqq m < \dfrac{9}{2}n+3 & \cdots ③ \\ 4n \leqq m < 4n+2 & \cdots ④ \end{cases}$$

である。$4n+2<4n+4$ であり，また $n \geqq 0$ より $4n \leqq \dfrac{9}{2}n$，$4n+2<\dfrac{9}{2}n+3$であるから，②，③，④をすべて満たす m が存在するには，

$$\dfrac{9}{2}n < 4n+2$$

$\therefore\ 0 \leqq n < 4$ (D)

が必要である。ここで，$\left[\dfrac{m}{3}\right]=\dfrac{3}{2}n$ が整数となることから n は偶数である。$n=0$ のとき，$\left[\dfrac{m}{4}\right]=\left[\dfrac{m}{3}\right]=\left[\dfrac{m}{2}\right]=0$ となることから，

$\left[\dfrac{m}{4}\right], \left[\dfrac{m}{3}\right], \left[\dfrac{m}{2}\right]$ が異なる3つの数とならないため不適である。

$n=2$ のとき，②，③，④は

$$\begin{cases} 8 \leqq m < 12 \\ 9 \leqq m < 12 \\ 8 \leqq m < 10 \end{cases}$$

となる。これらをすべて満たすものは $m=9$ であり，実際に

$\left(\left[\dfrac{9}{4}\right], \left[\dfrac{9}{3}\right], \left[\dfrac{9}{2}\right]\right)=(2, 3, 4)$ となり条件を満たす。(E)

[2] $\left[\dfrac{m}{2}\right]=2n+1$ のとき

①より

(D) ②，③，④を満たす m が存在する条件を記述して‥10 点

・より厳密に，m が存在する条件として $\dfrac{9}{2}n \leqq 4n+1 \therefore 0 \leqq n \leqq 2$ としても可

・$\left[\dfrac{m}{3}\right]=\dfrac{3}{2}n$ の左辺が整数より，先に $n=2k$（k を 0 以上の整数）と書き，

$$\begin{cases} 8k \leqq m < 8k+4 \\ 9k \leqq m < 9k+3 \\ 8k \leqq m < 8k+2 \end{cases}$$

を満たす m が存在する条件を $9k<8k+2 \therefore 0 \leqq k < 2$（もしくは $9k \leqq 8k+1$ より $0 \leqq k \leqq 1$）と求めても可

(E) $m=9$ を求めて‥5 点

・答えのみは不可

$$\left[\frac{m}{3}\right]=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{m}{4}\right]+\left[\frac{m}{2}\right]\right)$$
$$=\frac{1}{2}(n+2n+1)$$
$$=\frac{3n+1}{2}$$ (F)

である。ここで,

$$\left(\left[\frac{m}{4}\right],\left[\frac{m}{3}\right],\left[\frac{m}{2}\right]\right)=\left(n,\ \frac{3n+1}{2},\ 2n+1\right)$$

であるから,

$$\begin{cases} n\leqq\dfrac{m}{4}<n+1 \\ \dfrac{3n+1}{2}\leqq\dfrac{m}{3}<\dfrac{3n+1}{2}+1 \\ 2n+1\leqq\dfrac{m}{2}<2n+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 4n\leqq m<4n+4 & \cdots ⑤ \\ \dfrac{9n+3}{2}\leqq m<\dfrac{9n+9}{2} & \cdots ⑥ \\ 4n+2\leqq m<4n+4 & \cdots ⑦ \end{cases}$$

である。$4n<4n+2$ であり,$n\geqq 0$ より $4n<\dfrac{9n+3}{2}$, $4n+4<\dfrac{9n+9}{2}$ であるから,⑤, ⑥, ⑦をすべて満たす m が存在するには,

$$\frac{9n+3}{2}<4n+4$$

$\therefore\ 0\leqq n<5$ (G)

が必要である。ここで,$\left[\dfrac{m}{3}\right]=\dfrac{3n+1}{2}$ が整数となることから n は奇数である。$n=1$ のとき,⑤, ⑥, ⑦は

$$\begin{cases} 4\leqq m<8 \\ 6\leqq m<9 \\ 6\leqq m<8 \end{cases}$$

となる。これらをすべて満たすものは $m=6,\ 7$ であり,実際に $\left(\left[\frac{6}{4}\right],\left[\frac{6}{3}\right],\left[\frac{6}{2}\right]\right)=(1,\ 2,\ 3)$, $\left(\left[\frac{7}{4}\right],\left[\frac{7}{3}\right],\left[\frac{7}{2}\right]\right)=(1,\ 2,\ 3)$ となり条件を満たす。(H) $n=3$ のとき,⑤, ⑥, ⑦は

(F) $\left[\dfrac{m}{2}\right]=2n+1$ **のとき**

$\left[\dfrac{m}{3}\right]=\dfrac{3n+1}{2}$ **を求めて‥5 点**

(G) ⑤, ⑥, ⑦を満たす m が存在する条件を記述して‥10 点

・より厳密に, m が存在する条件として $\dfrac{9n+3}{2}\leqq 4n+3\ \therefore 0\leqq n\leqq 3$ **としても可**

・ $\left[\dfrac{m}{3}\right]=\dfrac{9n+3}{2}$ **の左辺が整数より,先に** $n=2l+1$ **(** l **を** 0 **以上の整数)と書き,**

$$\begin{cases} 8l+4\leqq m<8l+8 \\ 9l+6\leqq m<9l+9 \\ 8l+6\leqq m<8l+8 \end{cases}$$

を満たす m が存在する条件を $9l+6<8l+8\ \therefore 0\leqq l<2$ **(もしくは** $9l+6\leqq 8l+7$ **より** $0\leqq l\leqq 1$ **)と求めても可**

(H) $m=6,\ 7$ **を求めて‥10 点(各 5 点×2)**

・答えのみは不可

$$\begin{cases} 12 \leqq m < 16 \\ 15 \leqq m < 18 \\ 14 \leqq m < 16 \end{cases}$$

となる。これらをすべて満たすものは $m=15$ であり，実際に

$\left(\left[\frac{15}{4}\right], \left[\frac{15}{3}\right], \left[\frac{15}{2}\right]\right)=(3, 5, 7)$ となり条件を満たす。(I)

以上, [1], [2]より，条件を満たすものは $m=6, 7, 9, 15$ である。

(答) $m=6, 7, 9, 15$

[別解 1]

k を 0 以上の整数，r を $0 \leqq r \leqq 11$ を満たす整数とする。このとき，

$m=12k+r$ (J)

と表せる。これを用いると

$\left[\frac{m}{4}\right]=3k+\left[\frac{r}{4}\right]$ (K 1/3)

$\left[\frac{m}{3}\right]=4k+\left[\frac{r}{3}\right]$ (K 2/3)

$\left[\frac{m}{2}\right]=6k+\left[\frac{r}{2}\right]$ (K 3/3)

となる。異なる3つの数 $\left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{3}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$ がこの順に等差数列となるため，

$\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{m}{4}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m}{3}\right]$ (B)

$\Leftrightarrow \left(4k+\left[\frac{r}{3}\right]\right)-\left(3k+\left[\frac{r}{4}\right]\right)=\left(6k+\left[\frac{r}{2}\right]\right)-\left(4k+\left[\frac{r}{3}\right]\right)$

$\Leftrightarrow k=2\left[\frac{r}{3}\right]-\left[\frac{r}{4}\right]-\left[\frac{r}{2}\right]$ (L)

と変形できる。ここで，$0 \leqq r \leqq 11$ における $\left[\frac{r}{4}\right], \left[\frac{r}{3}\right], \left[\frac{r}{2}\right]$ は下表のようになる。(M)

r	$\left[\frac{r}{4}\right]$	$\left[\frac{r}{3}\right]$	$\left[\frac{r}{2}\right]$	$2\left[\frac{r}{3}\right]-\left[\frac{r}{4}\right]-\left[\frac{r}{2}\right]$
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0

(I) $m=15$ を求めて‥5 点

・答えのみは不可

[別解 1] 60 点

(J)(K)(B)(L)(M)(N)(O)

(J) $m=12k+r$ とかいて‥5 点

(K) $\left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{3}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$ を k, r を用いて表して‥5 点（完答）

(B) $\left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{3}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$ がこの順で等差数列となる条件を言い換えて‥5 点

・$2\left[\frac{m}{3}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m}{4}\right]$ なども可

(L) $k=2\left[\frac{r}{3}\right]-\left[\frac{r}{4}\right]-\left[\frac{r}{2}\right]$ を求めて‥5 点

(M) $0 \leqq r \leqq 11$ における $2\left[\frac{r}{3}\right]-\left[\frac{r}{4}\right]-\left[\frac{r}{2}\right]$ を求めて‥10 点

・1 つ間違えるごとに 2 点減点（最大 10 点減点）

・$\left[\frac{r}{4}\right], \left[\frac{r}{3}\right], \left[\frac{r}{2}\right]$ は求めなくても不問

2	0	0	1	-1
3	0	1	1	1
4	1	1	2	-1
5	1	1	2	-1
6	1	2	3	0
7	1	2	3	0
8	2	2	4	-2
9	2	3	4	0
10	2	3	5	-1
11	2	3	5	-1

上表より,

$$2\left[\frac{r}{3}\right]-\left[\frac{r}{4}\right]-\left[\frac{r}{2}\right]=\begin{cases}1 & (r=3)\\ 0 & (r=0,\ 1,\ 6,\ 7,\ 9)\\ -1 & (r=2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11)\\ -2 & (r=8)\end{cases}$$

となる。k は 0 以上の整数であるから，条件を満たす $(k,\ r)$ の組とそのときの m は

$(k,\ r)=(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 6),(0,\ 7),(0,\ 9),(1,\ 3)$ (N)

$\therefore m=0,\ 1,\ 6,\ 7,\ 9,\ 15$

となる。このうち，$\left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{3}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$ が異なる 3 つの数となるのは

$m=6,\ 7,\ 9,\ 15$ である。

(答) $m=6,\ 7,\ 9,\ 15$ (O)

[別解 2]

2 つの実数 $x,\ y\ (x<y)$ に対して

$x-1<[x]\leqq x$

$y-1<[y]\leqq y$

$\therefore y-x-1<[y]-[x]<y+1-x$ ・・・⑧(P)

が成立する。ここで等差数列の公差を $d\ (\geqq 1)$ とおく。(B)異なる 3 つの数 $\left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{3}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$ がこの順に等差数列となるための必要条件は，⑧より

(N) $(k,\ r)$ **の組をすべて求めて・・10 点**

(O) 答・・20 点

・必要な組み合わせが無い場合や不要な組み合わせがある場合は 1 つにつき 5 点減点（最大 20 点減点）

[別解 2] 60 点(P)(B)(Q)(M)(N)(O)

(P) $y-x-1<[y]-[x]<y+1-x$ **が成立することを示して・・5 点**

・(P)を示さずいきなり(Q)の不等式を立式した場合は，(Q)に 5 点加点

(B) $\left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{3}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$ **がこの順で等差数列となる条件を言い換えて・・5 点**

$$\begin{cases} \dfrac{m}{3}-\dfrac{m}{4}-1<\left[\dfrac{m}{3}\right]-\left[\dfrac{m}{4}\right]<\dfrac{m}{3}+1-\dfrac{m}{4} & \text{(B)(Q 1/2)} \\ \text{かつ} & \\ \dfrac{m}{2}-\dfrac{m}{3}-1<\left[\dfrac{m}{2}\right]-\left[\dfrac{m}{3}\right]<\dfrac{m}{2}+1-\dfrac{m}{3} & \text{(B)(Q 2/2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{12}-1<d<\frac{m}{12}+1 \text{かつ} \frac{m}{6}-1<d<\frac{m}{6}+1$$

である。これを満たす $d\ (\geqq 1)$ が存在するには，

$$\frac{m}{6}-1<\frac{m}{12}+1 \quad \text{(R)}$$

$$\Leftrightarrow m<24$$

が必要である。そこで，$m=0, 1, 2, \cdots, 23$ について $\left[\dfrac{m}{4}\right], \left[\dfrac{m}{3}\right], \left[\dfrac{m}{2}\right]$ の値をまとめると下表のようになる。(S)

m	$\left[\frac{m}{4}\right]$	$\left[\frac{m}{3}\right]$	$\left[\frac{m}{2}\right]$	$\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{m}{4}\right]$	$\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m}{3}\right]$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	1	2	0	1
5	1	1	2	0	1
6	1	2	3	1	1
7	1	2	3	1	1
8	2	2	4	0	2
9	2	3	4	1	1
10	2	3	5	1	2
11	2	3	5	1	2
12	3	4	6	1	2
13	3	4	6	1	2
14	3	4	7	1	3
15	3	5	7	2	2
16	4	5	8	1	3
17	4	5	8	1	3

・$d=\left[\dfrac{m}{2}\right]-\left[\dfrac{m}{3}\right]=\left[\dfrac{m}{3}\right]-\left[\dfrac{m}{4}\right]$ や $2\left[\dfrac{m}{3}\right]=\left[\dfrac{m}{2}\right]+\left[\dfrac{m}{4}\right]$ などが書いてあれば可

(Q)

$$\frac{m}{3}-\frac{m}{4}-1<\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{m}{4}\right]<\frac{m}{3}+1-\frac{m}{4}$$

$$\frac{m}{2}-\frac{m}{3}-1<\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m}{3}\right]<\frac{m}{2}+1-\frac{m}{3}$$

を立式して‥5 点（完答）

・(P)を示さずいきなり(Q)の不等式を立式した場合は，(Q)に 5 点加点

(R) $\dfrac{m}{12}-1<d<\dfrac{m}{12}+1$ かつ $\dfrac{m}{6}-1<d<\dfrac{m}{6}+1$ を満たす m が存在する条件を記述して‥10 点

(S) $0\leqq m\leqq 23$ における $\left[\dfrac{m}{4}\right], \left[\dfrac{m}{3}\right], \left[\dfrac{m}{2}\right]$ を求めて‥15 点

・1 つ間違えるごとに 3 点減点（最大 15 点減点）

・$\left[\dfrac{m}{4}\right], \left[\dfrac{m}{3}\right], \left[\dfrac{m}{2}\right]$ の代わりに $\left[\dfrac{m}{3}\right]-\left[\dfrac{m}{4}\right]$ と $\left[\dfrac{m}{2}\right]-\left[\dfrac{m}{3}\right]$ を求めても可

18	4	6	9	2	3
19	4	6	9	2	3
20	5	6	10	1	4
21	5	7	10	2	3
22	5	7	11	2	4
23	5	7	11	2	4

このうち，異なる3つの数$\left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{3}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$がこの順に等差数列となるのは，$\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{m}{4}\right]$と$\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m}{3}\right]$が1以上で等しくなるときであるから，

(B)上表より $m=6, 7, 9, 15$ である。

(答)　$m=6, 7, 9, 15$(O)

(0)　答‥20 点

・必要な組み合わせが無い場合や不要な組み合わせがある場合は 1 つにつき 5 点減点(最大 20 点減点)

2 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$y=x^3-3a^2x$ について，

$$y'=3x^2-3a^2$$
$$=3\left(x^2-a^2\right) \text{(A)}$$

より，点 $\left(t,\ t^3-3a^2t\right)$ における C の接線の方程式は，

$$y=3\left(t^2-a^2\right)\left(x-t\right)+t^3-3a^2t$$
$$=3\left(t^2-a^2\right)x-3t\left(t^2-a^2\right)+t^3-3a^2t \text{(B)} \quad \cdots\cdots\text{(答)}$$
$$=3\left(t^2-a^2\right)x-2t^3$$

である。

(1)　10 点 (A)(B)

(A)導関数を正しく計算できて‥5 点

(B)答‥5 点

(2)

(1)より，点 $\left(t,\ t^3-3a^2t\right)$ における C の接線の方程式は $y=3\left(t^2-a^2\right)x-2t^3$ であるから，これに $(p,\ q)$ を代入して得られる t についての 3 次方程式

$$q=3\left(t^2-a^2\right)p-2t^3$$
$$\Leftrightarrow 2t^3-3pt^2+3a^2p+q=0 \text{(A)} \quad \cdots①$$

を考える。このとき，①の実数解 t の個数は，点 $(p,\ q)$ を通るような C の接線の本数と一致する。したがって，①が相異なる実数解を 2 つだけ持つ(B)ような $(p,\ q)$ の条件を求めればよい。ここで，$f(t)=2t^3-3pt^2+3a^2p+q$ とおくと，

$$f'(t)=6t^2-6pt$$
$$=6t(t-p)$$

であるから，$p=0$ のときは $f(t)$ は単調増加関数となり，$f(t)=0$ の実数解は高々1 つである。$p\neq0$ のとき，$f(t)$ は $t=0,\ p$ のときに極値をとる 3 次関数となる。したがって，$f(t)=0$ が相異なる実数解を 2 つだけ持つための条件は，

「$p\neq0$」かつ「$f(0)=0$ または $f(p)=0$」(C)

$\Leftrightarrow$ 「$p\neq0$」かつ「$q=-3a^2p$ または $q=p^3-3a^2p$」

(2)　20 点 (A)(B)(C)(D)

(A) t についての 3 次方程式を導出して‥5 点

(B)がわかっていて‥5 点

(C)がわかっていて‥5 点

である。ここで，(p,q) は C の外部の点であったから，

$q \neq p^3 - 3a^2 p$ であることに注意すると，求める条件は，

$q = -3a^2 p\ (p \neq 0)$ (D) ……(答)

である。

(D)答‥5 点

(3)

(3)　30 点 (A)(B)(C)(D)

(2)より，(p,q) は直線 $y=-3a^2x$ 上の原点と異なる範囲に存在する。①に $q=-3a^2p$ を代入すると，

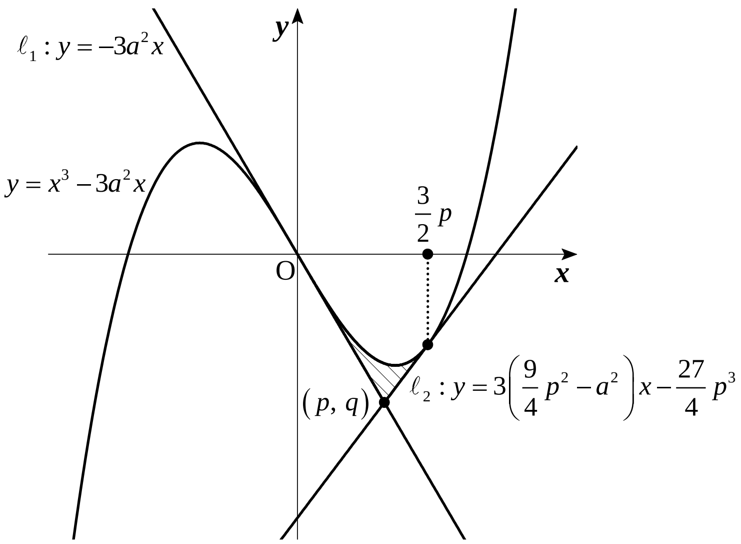
$$2t^3 - 3pt^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow t^2(2t-3p)=0$$

$$\therefore t=0,\ t=\frac{3}{2}p \text{ (A)}$$

となるから，C の接線の方程式 $y=3(t^2-a^2)x-2t^3$ に代入することで，このときの 2 本の接線は，

$$\ell_1 : y=-3a^2x,\ \ell_2 : y=3\left(\frac{9}{4}p^2-a^2\right)x-\frac{27}{4}p^3 \text{ (B)}$$

となる。図形の対称性から，$p=s,-s$ の場合に題意の面積は等しくなるから，以下 $0<p$ の場合について考える。$0<p$ の場合での曲線および直線の位置関係を図示すると，以下のようになる。



したがって，求める面積を $S(p)$ とおくと，

$$S(p)$$
$$=\int_0^p \left\{(x^3-3a^2x)-(-3a^2x)\right\}dx$$
$$+\int_p^{\frac{3}{2}p}\left[(x^3-3a^2x)-\left\{3\left(\frac{9}{4}p^2-a^2\right)x-\frac{27}{4}p^3\right\}\right]dx \text{ (C)}$$

(A) (p,q) を通る 2 つの接線の接点の x 座標を求めて‥5 点(完答)

(B) (p,q) を通る 2 つの接線の方程式を求めて‥10 点(各 5 点×2)

(C)定積分を正しく立式して‥5 点

※ p の符号に応じて立式が変わるた

$$=\int_0^p x^3dx+\int_p^{\frac{3}{2}p}\left(x-\frac{3}{2}p\right)^2(x+3p)dx$$
$$=\int_0^p x^3dx+\int_p^{\frac{3}{2}p}\left(x-\frac{3}{2}p\right)^2\left(x-\frac{3}{2}p+\frac{9}{2}p\right)dx$$
$$=\int_0^p x^3dx+\int_p^{\frac{3}{2}p}\left\{\left(x-\frac{3}{2}p\right)^3+\frac{9}{2}p\left(x-\frac{3}{2}p\right)^2\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^p+\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{3}{2}p\right)^4+\frac{3}{2}p\left(x-\frac{3}{2}p\right)^3\right]_p^{\frac{3}{2}p}$$
$$=\frac{1}{4}p^4-\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}p^4+\frac{3}{2}p\cdot\left(-\frac{1}{8}p^3\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}p^4-\frac{1}{64}p^4+\frac{3}{16}p^4$$
$$=\frac{16-1+12}{64}p^4$$
$$=\frac{27}{64}p^4$$

となるから，題意の面積を p の式で表すと，$\frac{27}{64}p^4$ (D)となる。 ⋯

⋯(答)

め、符号についての言及がない場合は加点しない

(D)答‥10 点

3 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

問題文の N 回の反復試行において，整数1が n_1 回出たときに，何番目に出たかを表す場合の数は，N 回の反復試行の中から n_1 回の試行を選ぶ場合の数 ${}_N\mathrm{C}_{n_1}$ に等しい。また，整数1が出る試行を選んだあとに，整数2が n_2 回出る試行を選ぶ場合の数は，${}_{N-n_1}\mathrm{C}_{n_2}$ になる。この考え方を整数 N まで繰り返すと，N 回の反復試行で同時に整数 k が n_k 回出るような場合の数は

$$
\begin{aligned}
&{}_N\mathrm{C}_{n_1}\ {}_{N-n_1}\mathrm{C}_{n_2}\ {}_{N-n_1-n_2}\mathrm{C}_{n_3}\cdots{}_{n_N}\mathrm{C}_{n_N}\\
&=\frac{N!}{n_1!\cancel{(N-n_1)!}}\frac{\cancel{(N-n_1)!}}{n_2!\cancel{(N-n_1-n_2)!}}\frac{\cancel{(N-n_1-n_2)!}}{n_3!\cancel{(N-n_1-n_2-n_3)!}}\cdots\frac{\cancel{0!}}{n_N!0!}\\
&=\frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_N!}\ \text{(A)}\quad(\because 0!=1)
\end{aligned}
$$

となる。また，それぞれの場合が達成される確率は

$$(p_1)^{n_1}(p_2)^{n_2}\cdots(p_N)^{n_N}$$

であるから，場合の数(順列の総数)と達成される確率の積をとることで

$$p(n_1,n_2,\cdots,n_N)=\frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_N!}(p_1)^{n_1}(p_2)^{n_2}\cdots(p_N)^{n_N}$$

を得る。

(証明終)(B)

(1)　10点(A)(B)

(A)係数 $\dfrac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_N!}$ の意味を正しく説明できて‥5点

－ 同じものを含む順列は教科書記載事項であるため二項係数からの導出は省略しても減点しない

(B)正しく証明できて‥5点

(1)[別解]

問題文の反復試行において，同時にそれぞれの整数 $k\in\{1,2,\cdots,l\}$ $(1\leqq l\leqq N-1)$ が n_k 回出たときに，整数 $l+1$ が n_{l+1} 回出る条件付き確率を $p_{n_1n_2\cdots n_l}(n_{l+1})$ とおく。ただし，$0\leqq\sum_{k=1}^{l+1}n_k\leqq N$ を満たす。また，同時に整数 $k\in\{1,2,\cdots,l\}$ $(1\leqq l\leqq N)$ が n_k 回出る確率を $p(n_1,n_2,\cdots,n_l)$ とおく。このとき，確率の乗法定理より，

$$p(n_1,n_2,\cdots,n_{l+1})$$

(1)[別解]　10点(C)(B)

$$= p(n_1, n_2, \cdots, n_l)\, p_{n_1 n_2 \cdots n_l}(n_{l+1})\ (1 \leqq l \leqq N-1) \qquad \cdots ①$$

が成立する。また，$S_l = \sum_{k=1}^{l} n_k$， $Q_l = 1 - \sum_{k=1}^{l} p_k$ とおくと

$$Q_{l+1} = Q_l - p_l \qquad \cdots ②$$

$$S_{l+1} = S_l + n_{l+1} \qquad \cdots ③$$

$$\sum_{l=1}^{N} p_l = 1 \Leftrightarrow Q_{N-1} = p_N \qquad \cdots ④$$

$$\sum_{l=1}^{N} n_l = N \Leftrightarrow N - S_{N-1} = n_N \qquad \cdots ⑤$$

が成立する。$1 \leqq l \leqq N-1$ のとき

$$p_{n_1 n_2 \cdots n_l}(n_{l+1}) = {}_{N-S_l}\mathrm{C}_{n_{l+1}} \left(\frac{p_{l+1}}{Q_l}\right)^{n_{l+1}} \left(1 - \frac{p_{l+1}}{Q_l}\right)^{N-S_l-n_{l+1}} \text{(C)}$$

$$= \frac{(N-S_l)!}{n_{l+1}!(N-S_l-n_{l+1})!} \frac{(p_{l+1})^{n_{l+1}} (Q_l - p_{l+1})^{N-S_l-n_{l+1}}}{(Q_l)^{N-S_l}}$$

$$= \frac{(N-S_l)!}{n_{l+1}!(N-S_{l+1})!} \frac{(p_{l+1})^{n_{l+1}} (Q_{l+1})^{N-S_{l+1}}}{(Q_l)^{N-S_l}} (\because ②,\ ③) \cdots ⑥$$

と表せる。さらに

$$p(n_1) = {}_N\mathrm{C}_{n_1} (p_1)^{n_1} (1-p_1)^{N-n_1}$$

$$= \frac{N!}{n_1!(N-S_1)!} (p_1)^{n_1} (Q_1)^{N-n_1} \ (\because n_1 = S_1) \qquad \cdots ⑦$$

が成立する。①の式を逐次的に適用すると

$$\begin{aligned}
&p(n_1, n_2, \cdots, n_N) \\
&= p(n_1, n_2, \cdots, n_{N-1})\, p_{n_1 n_2 \cdots n_{N-1}}(n_N) \\
&= p(n_1, n_2, \cdots, n_{N-2})\, p_{n_1 n_2 \cdots n_{N-2}}(n_{N-1})\, p_{n_1 n_2 \cdots n_{N-1}}(n_N) \\
&\vdots \\
&= p(n_1)\, p_{n_1}(n_2) \cdots p_{n_1 n_2 \cdots n_{N-2}}(n_{N-1})\, p_{n_1 n_2 \cdots n_{N-1}}(n_N) \\
&= p(n_1)\, p_{n_1}(n_2) \cdots p_{n_1 n_2 \cdots n_{N-2}}(n_{N-1})
\end{aligned}$$

($\because$ ④，⑤より $p_{n_1 n_2 \cdots n_{N-1}}(n_N) = {}_{n_N}\mathrm{C}_{n_N} \left(\frac{p_N}{Q_{N-1}}\right)^{n_N} = 1$)

を得る。これに⑥，⑦を代入して，

(C) $n_1, n_2, \cdots, n_l$ を決めたときに n_{l+1} を決める条件付き確率を正しく表して‥**5 点**

$$
\begin{aligned}
&p(n_1, n_2, \cdots, n_N) \\
&= \frac{N!}{n_1!(N-S_1)!}(p_1)^{n_1}(Q_1)^{N-S_1} \\
&\quad \times \frac{(N-S_1)!}{n_2!(N-S_2)!}\frac{(p_2)^{n_2}(Q_2)^{N-S_2}}{(Q_1)^{N-S_1}} \\
&\quad \times \cdots \\
&\quad \times \frac{(N-S_{N-2})!}{n_{N-1}!(N-S_{N-1})!}\frac{(p_{N-1})^{n_{N-1}}(Q_{N-1})^{N-S_{N-1}}}{(Q_{N-2})^{N-S_{N-2}}} \\
&= \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_N!}(p_1)^{n_1}(p_2)^{n_2}\cdots(p_N)^{n_N} \quad (\because ④, ⑤)
\end{aligned}
$$

を得る。

(証明終)(B)

(B)正しく証明できて‥5 点

(2)

(2)　25 点(A)(B)(C)(D)

(1)で証明できていなくても加点する

$p_k = \dfrac{k!}{\sum_{n=1}^{N} n!}$ のとき, (1)の結果を用いて

$$
\begin{aligned}
&p(n_1, n_2, \cdots, n_N) \\
&= \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_N!}(p_1)^{n_1}(p_2)^{n_2}\cdots(p_N)^{n_N} \\
&= \frac{N!}{(T_N)^N}\frac{(1!)^{n_1}}{n_1!}\frac{(2!)^{n_2}}{n_2!}\cdots\frac{(N!)^{n_N}}{n_N!}
\end{aligned}
$$

である。ここで, $T_N = \sum_{n=1}^{N} n!$ とおいた。 $n_k \geqq 1\ (k \leqq N-1)$ のとき,

$$
\frac{p(n_1, \cdots, n_{k-1}, n_k - 1, n_{k+1}, \cdots, n_N + 1)}{p(n_1, \cdots n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, \cdots, n_N)} \text{(A)}
$$

(A) n_N を増やすと確率が増えるという予想‥5 点

‐　予想が少しでも読みとれれば比の取り方など議論が誤っていても加点する

$$
= \frac{\dfrac{(k!)^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\dfrac{(N!)^{n_N+1}}{(n_N+1)!}}{\dfrac{(k!)^{n_k}}{n_k!}\dfrac{(N!)^{n_N}}{n_N!}}
$$

$$
= \frac{N!}{k!}\frac{n_k}{n_N+1} \text{(B)}
$$

(B)適切な比から簡潔な等価な式を導く‥5 点

$$
\geqq \frac{(N-1)!}{k!}
$$

$(\because 1 \leqq n_k + n_N \leqq N, 1 \leqq n_k$ より $(n_k, n_N) = (1, N-1)$ のとき

$\dfrac{n_k}{n_N+1}$ は最小値 $\dfrac{1}{N}$ をとる)

$\geqq 1$ (C 1/2) $(\because k \leqq N-1$, 等号成立は $k = N-1$ のとき)

$\therefore p(n_1,\cdots,n_k-1,\cdots,n_N+1)\geqq p(n_1,\cdots,n_k,\cdots,n_N)$

となる。等号成立条件は

$k=N-1$ かつ $(n_k,n_N)=(1,N-1)$ (C 2/2)・・・⑧

のときである。ゆえに,

$$\begin{aligned}&p(n_1,\cdots,n_k,\cdots,n_N)\\ &\leqq p(n_1,\cdots,n_k-1,\cdots,n_N+1)\\ &\ \vdots\\ &\leqq p(n_1,\cdots,0,\cdots,n_N+n_k)\end{aligned}$$ (等号成立は⑧のとき)

が成立する。

よって,これらの不等式を $k=1,2,\cdots,N-1$ について考えることで,

$p(n_1,n_2,\cdots,n_N)=M_N$ となるような 0 以上の整数の組 $(n_1,n_2,\cdots,n_N)$

は,

$$n_k=\begin{cases}0 & (k\leqq N-1)\\ N & (k=N)\end{cases},\ \begin{cases}0 & (k\leqq N-2)\\ 1 & (k=N-1)\\ N-1 & (k=N)\end{cases}$$ (D)・・・(答)

を満たすような組とわかる。

(3)

(1), (2)の結果から最大値は $M_N=\left(\dfrac{N!}{\sum_{n=1}^{N}n!}\right)^N$ (A)となり,その極限は

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N!}{\sum_{n=1}^{N}n!}\right)^N\\ &=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n!}{N!}\right)^{-N}\\ &=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{N!}{N!}+\frac{(N-1)!}{N!}+\cdots+\frac{1}{N!}\right\}^{-N}\\ &=\lim_{N\to\infty}\left\{1+\frac{1}{N}+\frac{1}{N(N-1)}+\cdots+\frac{1}{N!}\right\}^{-N}\ \text{(B)}\\ &=\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{1}{N}\left\{1+\frac{1}{(N-1)}+\cdots+\frac{1}{(N-1)!}\right\}\right]^{-N}\ \cdots⑨\end{aligned}$$

と表せる。$L_N=\sum_{n=1}^{N-1}\dfrac{n!}{(N-1)!}$ とおくと,⑨は

(C)大小関係を導く‥10 点

- 等号成立条件が誤っている場合または >1 としている場合は 5 点

(D)答‥5 点(完答)

(3) 25 点(A)(B)(C)(D)(E)

(A)最大値を正しく求める‥5 点

- (2)で最小値をとる n_k をすべて示せていなくても加点してよい。

(B)約分して分子から階乗を消した簡潔な式を導く‥5 点

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{L_N}{N}\right)^{-N}=\lim_{N\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{N}{L_N}}\right)^{\frac{N}{L_N}}\right\}^{-L_N}$$ (C)・・・⑩

と表せる。ここで $N \geqq 3$ とすると

$$\begin{aligned}&1<L_N\\&<1+\frac{1}{(N-1)}+\underbrace{\frac{1}{(N-1)(N-2)}+\cdots+\frac{1}{(N-1)(N-2)}}_{N-3\text{項}}\\&=1+\frac{1}{(N-1)}+\frac{N-3}{(N-1)(N-2)}\end{aligned}$$

と評価でき，最右辺は $\lim_{N\to\infty}\left\{1+\dfrac{2-\frac{5}{N}}{(N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)}\right\}=1$ に収束することより，はさみうちの原理から $\lim_{N\to\infty}L_N=1$ (D)である。ゆえに⑩は自然対数の底の定義より

e^{-1} ・・・(答)

に収束する。

(答) e^{-1} (E)

(C)自然対数の底の定義を用いた極限に帰着させる方針が読み取れる式変形‥5点

- $\left(1+\frac{X}{N}\right)^N$ のような形が分かれば加点する

(D)はさみうちの原理で $\lim_{N\to\infty}L_N=1$ を示す‥5点

(E)答‥5点(完答)

4 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$$w=\frac{z}{z+r}$$

$\Leftrightarrow w(z+r)=z$ かつ $z\neq -r$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{rw}{1-w}$ かつ $z\neq -r$ (A) ($\because$ $w=1$ とすると $r=0$ となり

$r>0$ に矛盾)

と言い換えられる。以下，$w\neq 1$ とし，$z=\dfrac{rw}{1-w}$ を $|z|\geqq 1$ に代入して

$$|z|\geqq 1$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{rw}{1-w}\right)\overline{\left(\frac{rw}{1-w}\right)}\geqq 1$$
$$\Leftrightarrow w\overline{w}\,r^2\geqq (1-w)\overline{(1-w)}$$
$$\Leftrightarrow w\overline{w}r^2\geqq (1-w)(1-\overline{w})$$
$$\Leftrightarrow 0\geqq (1-r^2)w\overline{w}-w-\overline{w}+1 \quad \text{(B)} \qquad \cdots①$$

を得る。$0<r<1$ のとき

$$① \Leftrightarrow w\overline{w}-\frac{w}{1-r^2}-\frac{\overline{w}}{1-r^2}+\frac{1}{1-r^2}\leqq 0\ (\because 1-r^2>0)$$

$$\Leftrightarrow \left(w-\frac{1}{1-r^2}\right)\left(\overline{w}-\frac{1}{1-r^2}\right)\leqq \frac{1}{(1-r^2)^2}-\frac{1}{1-r^2}$$

$$\Leftrightarrow \left|w-\frac{1}{1-r^2}\right|^2\leqq \frac{r^2}{(1-r^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left|w-\frac{1}{1-r^2}\right|\leqq \frac{r}{1-r^2}\ (\because 0<r<1)\ \text{(C)} \qquad \cdots②$$

となり，これは，w が複素数平面上の実軸上の点 $\dfrac{1}{1-r^2}$ を中心とする半径 $\dfrac{r}{1-r^2}$ の円の内側に存在することを表す。$\dfrac{1}{1-r^2}>\dfrac{r}{1-r^2}$ に注

(1)　30 点 (A)(B)

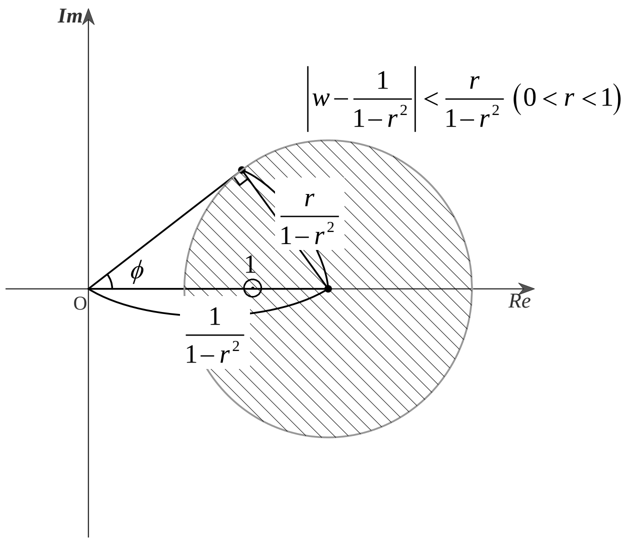
(A)を求めて‥5 点

(B)を求めて‥5 点

(C)を求めて‥10 点

意して図示すると下図の斜線部のようになる。ただし，境界となる円周は含み，$w \neq 1$より点 1 は除く。また下図の$\phi\left(0<\phi<\dfrac{\pi}{2}\right)$は

$\sin\phi = \dfrac{\dfrac{r}{1-r^2}}{\dfrac{1}{1-r^2}} = r$ を満たす実数である。



…(答) (D)

(D)を正しく図示できていて‥10 点

（$w \neq 1$を除いていない場合は 5 点）

(2)

実数x, yを用いて，$w' = x+yi$とおき，$|c| = r$より，実数θを用いて$c = r(\cos\theta + i\sin\theta)$とおく(A)。このとき，$\mathrm{Re}(cw')\mathrm{Im}(cw') \leqq 0$となる条件を求めると，

$$cw' = r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(x+yi)$$
$$= r\{(x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)\}$$

であるから，

$$\mathrm{Re}(cw')\mathrm{Im}(cw') \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow (\cos x\theta - y\sin\theta)(x\sin\theta + y\cos\theta) \leqq 0\ (\because r>0)$$

$\Leftrightarrow$
「$x\cos\theta - y\sin\theta < 0$ かつ
$x\sin\theta + y\cos\theta > 0$」
または
「$x\cos\theta - y\sin\theta > 0$ かつ
$x\sin\theta + y\cos\theta < 0$」
または　　　　　・・・③
「$x\cos\theta - y\sin\theta = 0$」　　　(B)
または

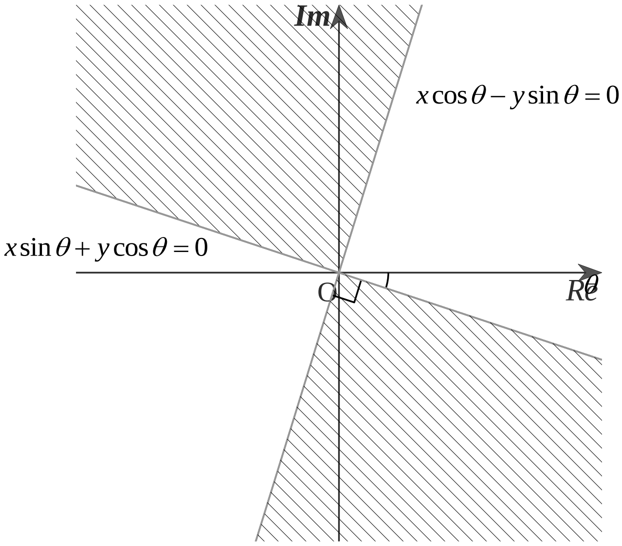
(2)　30 点 (A)(B)(C)(D)

(A) cをr, θを用いて表して‥5 点

(B) $\mathrm{Re}(cw')\mathrm{Im}(cw') \leqq 0$となる$w'$の存在領域を求めて‥10 点

「$x\sin\theta+y\cos\theta=0$」

である。③で表される領域を図示すると下図の斜線部のようになる。ただし境界を含む。



上図はあるθに対して一意に定まる$\mathrm{Re}(cw')\mathrm{Im}(cw')\leqq 0$を満たす複素数$w'$の存在領域である。この領域と②が表す領域に共通部分が存在すれば，その共通部分に含まれる点wは，あるθに対して一意に定まるcについて，$\mathrm{Re}(cw)\mathrm{Im}(cw)\leqq 0$を満たしている。ここで，どんな$\theta$に対しても②，③が表す領域に共通部分が存在するための条件(C)が題意の条件であるから，

(C)がわかっていて‥10 点

$$2\phi\geqq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\phi\geqq\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 1>r\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

を満たすようなrの最小値を求めればよい。したがって，求めるrの最小値は$\frac{1}{\sqrt{2}}$(D)である。　…(答)

(D)答‥5 点

‘

$\boxed{5}$ （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$$y=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}\left(0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\text{において}$$

$$y'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-3\cdot 2x}{\sqrt{4-3x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3x}{2\sqrt{4-3x^2}} \quad \text{(A)}$$

$$=\frac{\sqrt{4-3x^2}-3x}{2\sqrt{4-3x^2}}$$

$$=\frac{2\left(1-3x^2\right)}{\sqrt{4-3x^2}\left(\sqrt{4-3x^2}+3x\right)}$$

と計算できる。このとき，$0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ において $\sqrt{4-3x^2}+3x>0$ であるから，

$$y'=0$$
$$\Leftrightarrow 1-3x^2=0$$
$$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because x\geqq 0) \quad \text{(B)}$$

となる。以上より，$y=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}\left(0\leqq x\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ の増減表は下表となる。(C)

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
y'		$+$	0	$-$	
y	(1)	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(1)　20点(A)(B)(C)(D)

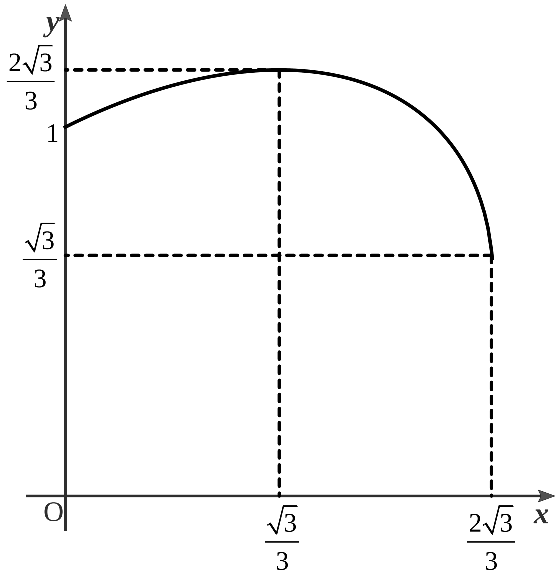
(A)　$y'=\frac{1}{2}-\frac{3x}{2\sqrt{4-3x^2}}$ までの計算‥5点

(B)　$y'=0$ の解を $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ と求めて‥5点

(C)　増減表‥5点

・$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 前後での y' の符号が正しければ可

以上より，C_1 の概形は下図のようになる。(D)



(答) 前図

(D) 図示‥5 点

・極大値が図から読み取れれば可

(1)[別解]

$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi\left(0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ (E 1/2)とおく。このとき，

$$y=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi+\frac{1}{2}\cdot 2\sin\varphi\ (\because \sin\varphi\geqq 0)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$$ (E 2/2)

となる。x, y を φ で微分すると

$$\frac{dx}{d\varphi}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\varphi$$ (F 1/2)

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$$ (F 1/2)

となる。したがって，増減表は下表となる。(G)

(1)[別解]　20 点(E)(F)(G)(D)

(E) $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi$ **とおいて**

$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$ **を導く**

‥5 点（完答）

・$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\phi$，

$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\phi+\frac{\pi}{3}\right)$ **も可**

(F) $\frac{dx}{d\varphi}$，$\frac{dy}{d\varphi}$ **を求める**

‥5 点（完答）

・$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\phi$ **とおく場合，**

$\frac{dx}{d\phi}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\phi$，

$\frac{dy}{d\phi}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\phi+\frac{\pi}{3}\right)$

(G) 増減表‥5 点

φ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\varphi}$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\leftarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{d\varphi}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\uparrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\downarrow$	1

以上より，C_1 の概形は解答のようになる。(D)

(答) 解答の図

(2)

$f(x)=\tan^n x-\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}\ \left(\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq 1\right)$ とおく。(A)このとき，

$$f'(x)=n\cdot\frac{\tan^{n-1}x}{\cos^2 x}-\frac{1}{2}+\frac{3x}{2\sqrt{4-3x^2}}\ \text{(A)}$$

$$=n\left(\tan^{n-1}x+\tan^{n+1}x\right)-\frac{1}{2}+\frac{3x}{2\sqrt{4-3x^2}}$$

$$\geqq n(1+1)-\frac{1}{2}+\frac{3x}{2\sqrt{4-3x^2}}\ \left(\because \tan^n x\geqq 1\right)$$

$$\geqq 0\ (\because n\geqq 1)\ \text{(B)}$$

となり，$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq 1$ において $f(x)$ は単調増加する。また，

$$f(1)=\tan^n 1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{4-3\cdot 1^2}}{2}$$

$$=\tan^n 1-1$$

$$>1-1\quad\left(\because \frac{\pi}{4}<1\right)\ \text{(C)}$$

$$=0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{64-3\pi^2}}{8}$$

・$x=\frac{\pi}{3}$ 前後での $\frac{dx}{d\varphi}$，$\frac{dy}{d\varphi}$ の符号が正しければ可

・$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\phi$ とおく場合，

ϕ	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$
$\frac{dx}{d\phi}$	$+$	$+$	$+$
$\frac{dy}{d\phi}$	$+$	0	$-$

(D) 図示‥5 点

・極大値が図から読み取れれば可

(2)　25 点(A)(B)(C)(D)(E)

(A) $f(x)=\tan^n x-\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}$ **とおき，** $f'(x)$ **を計算して‥5 点**

・$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}-\tan^n x$ **としても可**

(B) $f'(x)\geqq 0$ **を示して‥5 点**

・$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}-\tan^n x$ **とおく場合，** $f'(x)\leqq 0$

(C) $f(1)>0$ **を示して‥5 点**

・$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}-\tan^n x$ **とおく場合，** $f(1)<0$

$$< 1-\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{64-3\cdot 3.5^2}}{8} \ (\because 3<\pi<3.5)$$
$$=\frac{5-\sqrt{27.25}}{8}$$
$$<0$$
(D)

であるから，中間値の定理より，$\frac{\pi}{4}<x<1$ において $f(x)=0$ となる x が少なくとも1つ存在する。以上より，$\frac{\pi}{4}<x<1$ において，C_1 と C_2 は共有点をただ1つ持つことが示された。(E)

(証明終)

(2)[別解]

$C_1: y=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}\left(0\leqq x\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ について，$\frac{x}{2}$ を左辺に移項し，両辺を 2 乗すると

$$\left(y-\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}\right)^2$$
$$\therefore x^2-xy+y^2=1$$

となる。ここで，$y=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}\left(0\leqq x\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ も $\frac{x}{2}$ を左辺に移項し，両辺を 2 乗すると $x^2-xy+y^2=1$ となる。このとき，$x\left(0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ で微分すると，

$$y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-3\cdot 2x}{\sqrt{4-3x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3x}{2\sqrt{4-3x^2}}$$
$$>0 \ (\because x\geqq 0)$$

となり，$0\leqq x\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}$ で $y=\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}$ は単調増加をする。以上より，

$y=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}\left(0\leqq x\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ における y の最大値は

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}>1$$

(D) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$ **を示して‥5 点**

・ $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}-\tan^n x$ **とおく場合，** $f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$

(E) 中間値の定理を用いて‥5 点

(2)[別解] 25 点(F)(G)(H)(I)(E)

$$y=\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}\left(0\leqq x\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$ における y の最大値は

$$\frac{\sqrt{3}}{3}<1$$

である。ここで，$C_2 : y=\tan^n x$ について，$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq 1$ において単調増加であり，$\tan^n x\geqq 1$ であるため，$\frac{\pi}{4}<x<1$ において $x^2-xy+y^2=1$ と $C_2 : y=\tan^n x$ が共有点をただ1つもつことを示せばよい。2 式について，y を消去すると $x^2-x\tan^n x+\tan^{2n} x=1$ となる。ここで，$g(x)=x^2-x\tan^n x+\tan^{2n}x-1$ とおき，$\frac{\pi}{4}<x<1$ における増減を考える。(F) このとき，

$$g'(x)=2x-\left(\tan^n x+x\cdot n\cdot\frac{\tan^{n-1}x}{\cos^2 x}\right)+2n\cdot\frac{\tan^{2n-1}x}{\cos^2 x} \text{ (F)}$$
$$=2x-\tan^n x+n\cdot\frac{\tan^{n-1}x}{\cos^2 x}\left(2\tan^n x-x\right)$$
$$=\frac{3}{2}x+\left(n\cdot\frac{\tan^{n-1}x}{\cos^2 x}-\frac{1}{2}\right)\left(2\tan^n x-x\right)$$
$$=\frac{3}{2}x+\left\{n\left(\tan^{n-1}x+\tan^{n+1}x\right)-\frac{1}{2}\right\}\left(2\tan^n x-x\right)$$

と計算できる。ここで $\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq 1$ において，n が自然数であるため.

$$n\left(\tan^{n-1}x+\tan^{n+1}x\right)-\frac{1}{2}\geqq n(1+1)-\frac{1}{2}>0$$

である。$h(x)=2\tan^n x-x\left(\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq 1\right)$ について，

$$h'(x)=2n\cdot\frac{\tan^{n-1}x}{\cos^2 x}-1$$
$$=2n\left(\tan^{n-1}x+\tan^{n+1}x\right)-1$$
$$\geqq 2n\cdot(1+1)-1$$
$$>0\ (\because n\geqq 1)$$

より，$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq 1$ において $h(x)$ は単調増加し，$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{4}>0$ より $h(x)>0$ となる。したがって，

(F) $g(x)=x^2-x\tan^n x+\tan^{2n}x-1$ **とおき，** $g'(x)$ **を計算して‥5 点**

・ $g(x)=1-x^2+x\tan^n x-\tan^{2n}x$ **としても可**

・ $\frac{\pi}{4}<x<1$ **において，「**C_1 **と** C_2 **は共有点をただ1つ持つこと」と「** $x^2-xy+y^2=1$ **と** $C_2 : y=\tan^n x$ **が共有点をただ1つ持つこと」が同値であることを示していなければ不可**

$$g'(x)=\frac{3}{2}x+\left\{n\left(\tan^{n-1}x+\tan^{n+1}x\right)-\frac{1}{2}\right\}\left(2\tan^n x-x\right)$$
$$>\frac{3}{2}x$$
$$>0 \quad \text{(G)}$$

となり，$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq 1$ において $g(x)$ は単調増加する。$\frac{\pi}{4}<1$ より $1<\tan 1$ であることを用いると

$$g(1)=1^2-1\cdot\tan^n 1+\tan^{2n}1-1$$
$$=\left(\tan^n 1-1\right)\tan^n 1$$
$$>0 \quad \text{(H)}$$

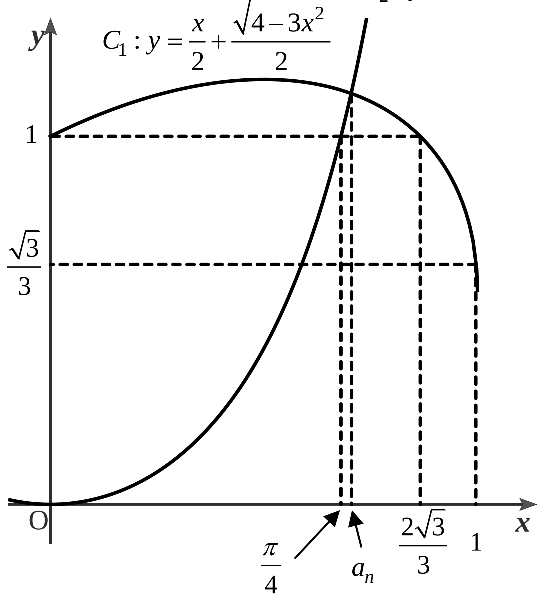
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\pi}{4}<0 \quad \text{(I)}$$

となるから，中間値の定理より，$\frac{\pi}{4}<x<1$ において $g(x)=0$ となる x が少なくとも1つ存在する。以上より，$\frac{\pi}{4}<x<1$ において，C_1 と C_2 は共有点をただ1つ持つことが示された。(E)

(証明終)

(3)

$C_1: y=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-3x^2}}{2}\ \left(0\leqq x\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$C_2: y=\tan^n x$ を同一平面上に図示すると下図となる。



2 式の y を消去すると

(G) $g'(x)>0$ を示して‥5 点

・$g'(x)$ について，$0<x<\frac{\pi}{2}$ において $\sin x<x<\tan x$ が成り立つことから $g'(x)>0$ を示していても可

・$g(x)=1-x^2+x\tan^n x-\tan^{2n}x$ とおく場合，$g'(x)<0$

(H) $g(1)>0$ を示して‥5 点

(I) $g\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$ を示して‥5 点

・$g(x)=1-x^2+x\tan^n x-\tan^{2n}x$ とおく場合，それぞれ $g(1)<0$，$g\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$

(E) 中間値の定理を用いて‥5 点

(3) 15 点(A)(B)(C)

$$\tan^n a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{\sqrt{4-3a_n^{\ 2}}}{2}$$

となる。今, (2)と $\frac{\pi}{4} < a_n < 1$ より

$$\frac{\pi}{8} < \frac{a_n}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{4-3a_n^{\ 2}}}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{4-3\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

であるから,

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} < \tan^n a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4-3\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)^{\frac{1}{n}} < \tan a_n < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4-3\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\right)^{\frac{1}{n}} \text{(A)}$$

と不等式評価ができる。このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4-3\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \tan a_n = 1 \text{(B)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$$

と求まる。

(答) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$ (C)

(A) $\tan a_n$ **の不等式評価をして‥5 点**

(B) はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty} \tan a_n = 1$ **を求めて‥5 点**

(C) 答‥5 点