２０２４年　第一回東工大本番レベル模試・物理

解答・採点基準

全３問　１２０分　１５０点満点

$\boxed{\text{Ⅰ}}$ （５０点）

【解答・採点基準】

[A] (a) $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (b) 単振動の中心は $X=L+\dfrac{mg}{k}$ なので求める速さを V_m，位置エネルギーの基準を原点とすると，力学的エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}mV_m{}^2-mg\left(L+\dfrac{mg}{k}\right)+\dfrac{1}{2}k\left(L+\dfrac{mg}{k}-L\right)^2=-mgL$ $\therefore V_m=g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ （答） $g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$	[A] 10 点 (a) 4 点 (b) 6 点 ＊力学的エネルギー保存則の立式に 4 点 ＊答に 2 点
(b)[別解 1] 小球の速さの最大値を V_m，位置エネルギーの基準をつり合いの位置とすると力学的エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}mV_m{}^2=\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2$ $\therefore V_m=g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ （答） $g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$	(b)[別解 1] 6 点 ＊力学的エネルギー保存則の立式に 4 点 ＊答に 2 点

(b)[別解 2]

単振動の速さの最大値は振幅と角振動数の積で求められ，振幅は $\dfrac{mg}{k}$ なので

$$\frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}=g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

（答） $g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

[B]

(c) $$mA=-k\left(X-L-\frac{m\alpha}{k}\right)$$

(d)

(c)の運動方程式より V_0 は(b)の答えの g を α としたものとみなせるので

$$V_0=\alpha\sqrt{\frac{m}{k}}$$

（答） $V_0=\alpha\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(e)

時刻 0 において小球の速さが 0 であるので小球の速さが最大となるのは $\dfrac{1}{4}$ 周期後となる。この単振動の周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ なので

$$t_0=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

また，時刻 t_0 における天井の x 座標は

$\dfrac{1}{2}(g-\alpha)t_0^{\,2}=\dfrac{\pi^2m(g-\alpha)}{8k}$ であり，天井と共に運動する観測者から見た小球の速さが V_0 となるのは単振動の中心なので小球の X 座標は $X=L+\dfrac{m\alpha}{k}$ である。以上より求める x 座標は

(b)[別解 2] 6 点

＊単振動の速さの最大値が振幅と角振動数の積で表されることへの言及に 4 点

＊答に 2 点

[B] 20 点

(c) 4 点

(d) 6 点

＊(b)の g を α に変えたものであることへの言及に 4 点

(＊(b)と同じ解法で導出していても 4 点)

＊答に 2 点

(e) 10 点

＊速さが最大となるのが 4 分の 1 周期後であることへの言及に 2 点

＊時刻 t_0 での天井の x 座標を求めて 2 点

＊時刻 t_0 での小球の X 座標を求めて 2 点

＊答に各 2 点×2

$$x=\frac{\pi^2 m(g-a)}{8k}+L+\frac{m\alpha}{k}$$

（答） $t_0=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$x=\frac{\pi^2 m(g-a)}{8k}+L+\frac{m\alpha}{k}$$

[C]

[C] 20 点

(f)

小球 1: $mA_1=-k\left\{2X_1-X_2-\frac{m(g-a)}{k}\right\}$

小球 2: $\frac{7}{2}mA_2=-k\left\{X_2-X_1-L-\frac{7m(g-a)}{2k}\right\}$

(f) 2 点(各 1 点×2)

(g)

天井と共に運動する観測者から見た各小球の加速度は

小球 1： $A_1=-\frac{16}{7}\frac{k}{m}\left(X_1-L-\frac{7mg}{16k}\right)$

小球 2： $A_2=-\frac{9}{7}\frac{k}{m}\left(X_2-2L-\frac{7mg}{9k}\right)$

となるので，小球 1, 2 の角振動数は

小球 1： $4\sqrt{\frac{k}{7m}}$

小球 2： $3\sqrt{\frac{k}{7m}}$

（答）小球 1： $4\sqrt{\frac{k}{7m}}$

小球 2： $3\sqrt{\frac{k}{7m}}$

(g) 6 点

＊それぞれの加速度を求めて

各 1 点×2

＊答に各 2 点×2

(h)

小球 1, 2 の単振動の周期は(f)の角振動数からそれぞれ

$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{7m}{k}}$, $\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{7m}{k}}$ である。時刻 0 で 2 つのばねは自然長であるので, 2 つのばねが自然長となる時刻は 0 以上の整数 n, n' を用いて

(h) 6 点

＊それぞれの単振動の周期を求めて

各 1 点×2

＊２つのばねが自然長になる時刻の条

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{7m}{k}}n=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{7m}{k}}n'$$ を満たす。よって，上式を満たす 1 以上の最小の n, n' は $n=4, n'=3$ である。よって $$t_1=2\pi\sqrt{\frac{7m}{k}}$$ （答） $t_1=2\pi\sqrt{\frac{7m}{k}}$	件式に 2 点 ＊答に 2 点
(i) 天井の加速度は $$a=\frac{k}{m}\left\{\frac{2}{7}\left(X_1-L\right)+\left(X_2-2L\right)\right\}$$ であり，(g)の各小球の加速度より小球 1，2 の単振動の振動の中心がそれぞれ $X=L+\frac{7mg}{16k}$, $X=2L+\frac{7mg}{9k}$ である。さらに，小球 1，2 の時刻 0 における X 座標はそれぞれ $L, 2L$ であることから時刻 $0<t<t_1$ では，常に $X_1>L$， $X_2>2L$ の少なくとも一方は成り立つので $a>0$ である。よって $x_0>0$ となり，①が正しい。 （答）①	(i) 6 点 ＊それぞれの単振動の中心を求めて各 1 点×2 ＊天井の加速度が時刻 t_1 まで常に 0 以上であることへの言及に 3 点 ＊答に 1 点