２０２４年　東京科学大学本番レベル模試・数学

解答・解説・採点基準

全５問　１８０分　３００点満点

$\boxed{1}$ （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

1 回の操作による状態の遷移とその確率を示すと以下のようになる。ただし $\left(\boxed{\mathrm{X}},\ S\right)$ は操作後に文字カードの表が $\boxed{\mathrm{X}} \in \left\{\boxed{\mathrm{A}},\ \boxed{\mathrm{B}}\right\}$ で，数字カードの表の数の和が $S \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ となる状態を表す。

$$
\begin{tikzcd}
\begin{matrix} p_n^{\mathrm{A}} \\ \left(\boxed{\mathrm{A}},\ 0\right) \end{matrix} \arrow[r, "1"] & \begin{matrix} q_n^{\mathrm{A}} \\ \left(\boxed{\mathrm{A}},\ 1\right) \end{matrix} \arrow[r, "\frac{2}{3}"] \arrow[d, shift left, "\frac{1}{3}"] & \begin{matrix} r_n^{\mathrm{A}} \\ \left(\boxed{\mathrm{A}},\ 2\right) \end{matrix} \arrow[r, "\frac{1}{3}"] \arrow[d, shift left, "\frac{2}{3}"] & \begin{matrix} s_n^{\mathrm{A}} \\ \left(\boxed{\mathrm{A}},\ 3\right) \end{matrix} \arrow[d, "1"] \\
\begin{matrix} \left(\boxed{\mathrm{B}},\ 0\right) \\ p_n^{\mathrm{B}} \end{matrix} \arrow[u, "1"] & \begin{matrix} \left(\boxed{\mathrm{B}},\ 1\right) \\ q_n^{\mathrm{B}} \end{matrix} \arrow[l, "\frac{1}{3}"] \arrow[u, shift left, "\frac{2}{3}"] & \begin{matrix} \left(\boxed{\mathrm{B}},\ 2\right) \\ r_n^{\mathrm{B}} \end{matrix} \arrow[l, "\frac{2}{3}"] \arrow[u, shift left, "\frac{1}{3}"] & \begin{matrix} \left(\boxed{\mathrm{B}},\ 3\right) \\ s_n^{\mathrm{B}} \end{matrix} \arrow[l, "1"]
\end{tikzcd}
$$

(1)

(1)　10 点(A)

$n=0$ の場合の確率は形式的に，

$$\left(p_0^{\mathrm{A}},\ q_0^{\mathrm{A}},\ r_0^{\mathrm{A}},\ s_0^{\mathrm{A}},\ p_0^{\mathrm{B}},\ q_0^{\mathrm{B}},\ r_0^{\mathrm{B}},\ s_0^{\mathrm{B}}\right)=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

と定義できる。これと上の遷移図をもとに計算を進めると，

$$\left(p_1^{\mathrm{A}},\ q_1^{\mathrm{A}},\ r_1^{\mathrm{A}},\ s_1^{\mathrm{A}},\ p_1^{\mathrm{B}},\ q_1^{\mathrm{B}},\ r_1^{\mathrm{B}},\ s_1^{\mathrm{B}}\right)=(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$\left(p_2^{\mathrm{A}},\ q_2^{\mathrm{A}},\ r_2^{\mathrm{A}},\ s_2^{\mathrm{A}},\ p_2^{\mathrm{B}},\ q_2^{\mathrm{B}},\ r_2^{\mathrm{B}},\ s_2^{\mathrm{B}}\right)=\left(0,\ 0,\ \frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$$

$$\left(p_3^{\mathrm{A}},\ q_3^{\mathrm{A}},\ r_3^{\mathrm{A}},\ s_3^{\mathrm{A}},\ p_3^{\mathrm{B}},\ q_3^{\mathrm{B}},\ r_3^{\mathrm{B}},\ s_3^{\mathrm{B}}\right)=\left(0,\ \frac{2}{9},\ 0,\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{9},\ 0,\ \frac{4}{9},\ 0\right)$$

となる。ゆえに0より大きいものは

$$q_1^{\mathrm{A}}=1,\ r_2^{\mathrm{A}}=\frac{2}{3},\ q_2^{\mathrm{B}}=\frac{1}{3},\ q_3^{\mathrm{A}}=\frac{2}{9},\ s_3^{\mathrm{A}}=\frac{2}{9},\ p_3^{\mathrm{B}}=\frac{1}{9},\ r_3^{\mathrm{B}}=\frac{4}{9}$$

である。

(答)　$q_1^{\mathrm{A}}=1,\ r_2^{\mathrm{A}}=\frac{2}{3},\ q_2^{\mathrm{B}}=\frac{1}{3},\ q_3^{\mathrm{A}}=\frac{2}{9},\ s_3^{\mathrm{A}}=\frac{2}{9},\ p_3^{\mathrm{B}}=\frac{1}{9},\ r_3^{\mathrm{B}}=\frac{4}{9}$ (A)

(2)

求める確率は $T_n=q_n^{\mathrm{A}}+q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}$ である。上の遷移図より，以下の漸化式が成立する。

$$\begin{cases} p_{n+1}^{\mathrm{A}} = p_n^{\mathrm{B}} \\ p_{n+1}^{\mathrm{B}} = \frac{1}{3}q_n^{\mathrm{B}} \\ q_{n+1}^{\mathrm{A}} = p_n^{\mathrm{A}} + \frac{2}{3}q_n^{\mathrm{B}} \\ q_{n+1}^{\mathrm{B}} = \frac{1}{3}q_n^{\mathrm{A}} + \frac{2}{3}r_n^{\mathrm{B}} \\ r_{n+1}^{\mathrm{A}} = \frac{2}{3}q_n^{\mathrm{A}} + \frac{1}{3}r_n^{\mathrm{B}} \\ r_{n+1}^{\mathrm{B}} = \frac{2}{3}r_n^{\mathrm{A}} + s_n^{\mathrm{B}} \\ s_{n+1}^{\mathrm{A}} = \frac{1}{3}r_n^{\mathrm{A}} \\ s_{n+1}^{\mathrm{B}} = s_n^{\mathrm{A}} \end{cases}$$

(A)　　　　・・・①

①の 1 行目と 2 行目の式から p_n^{B} を消去して

$$p_{n+2}^{\mathrm{A}}=\frac{1}{3}q_n^{\mathrm{B}} \qquad \cdots ②$$

を得る。①の 7 行目と 8 行目の式から s_n^{A} を消去して

$$s_{n+2}^{\mathrm{B}}=\frac{1}{3}r_n^{\mathrm{A}} \qquad \cdots ③$$

を得る。②, ③をそれぞれ, ①の 3 行目, 6 行目に代入し，p_n^{A}，s_n^{B} を消去すると，①の 4 行目, 5 行目と合わせて

$$\begin{cases} q_{n+3}^{\mathrm{A}}=\frac{1}{3}q_n^{\mathrm{B}}+\frac{2}{3}q_{n+2}^{\mathrm{B}} \\ q_{n+1}^{\mathrm{B}}=\frac{1}{3}q_n^{\mathrm{A}}+\frac{2}{3}r_n^{\mathrm{B}} \\ r_{n+1}^{\mathrm{A}}=\frac{2}{3}q_n^{\mathrm{A}}+\frac{1}{3}r_n^{\mathrm{B}} \\ r_{n+3}^{\mathrm{B}}=\frac{2}{3}r_{n+2}^{\mathrm{A}}+\frac{1}{3}r_n^{\mathrm{A}} \end{cases} \text{(B)} \qquad \cdots ④$$

となる。よって，④の 2 行目+3 行目より

$$q_{n+1}^{\mathrm{B}}+r_{n+1}^{\mathrm{A}}=q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}} \qquad \cdots ⑤$$

が成り立つ。④の 1 行目+4 行目より

(A)答‥10 点

- 誤り 1 つにつき 5 点減点

(2)　50 点(A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)

(A) $n\to n+1$ の遷移図に基づいた確率漸化式を立式する‥10 点

(B)変数消去により，8 元から 4 元の連立漸化式に縮約する‥5 点

$$q_{n+3}^{\mathrm{A}}+r_{n+3}^{\mathrm{B}}=\frac{2}{3}\left(q_{n+2}^{\mathrm{B}}+r_{n+2}^{\mathrm{A}}\right)+\frac{1}{3}\left(q_{n}^{\mathrm{B}}+r_{n}^{\mathrm{A}}\right)$$

・・・⑥

が成り立つ。ここで，新たに

$$\begin{aligned}a_n&=q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}}\\ b_n&=q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}\end{aligned}$$ (C)

とおくと，$T_n=a_n+b_n$ で与えられる。さらに，⑤，⑥より

$$\begin{cases}a_{n+1}=b_n\\ b_{n+3}=\dfrac{2}{3}a_{n+2}+\dfrac{1}{3}a_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{n+1}=b_n\\ a_{n+4}=\dfrac{2}{3}a_{n+2}+\dfrac{1}{3}a_n\end{cases}$$ (D)

となる。三項間漸化式を解くために，まず初期状態を求める。形式的に $n=0$ を操作を始める前の状態として定めれば，(1)の結果より

$$\begin{aligned}(a_0,\,b_0)&=(0,\,0)\\ (a_1,\,b_1)&=(0,\,1)\\ (a_2,\,b_2)&=(1,0)\\ (a_3,\,b_3)&=\left(0,\,\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$ (E)

が得られる。次に，三項間漸化式を変形して

$$a_{n+4}=\frac{2}{3}a_{n+2}+\frac{1}{3}a_n\Leftrightarrow a_{n+4}+\frac{1}{3}a_{n+2}=a_{n+2}+\frac{1}{3}a_n$$

を得る。よって，数列 $\left\{a_{n+2}+\dfrac{1}{3}a_n\right\}$ は定数数列(F 1/2)であり，初項の偶奇性に注意して

$$\therefore a_{n+2}+\frac{1}{3}a_n=\begin{cases}1 & (n=0,\,2,\,4,\,\cdots)\\ 0 & (n=1,\,3,\,5,\,\cdots)\end{cases}$$ ・・・⑦

が得られる。また，

$$a_{n+4}=\frac{2}{3}a_{n+2}+\frac{1}{3}a_n\Leftrightarrow a_{n+4}-a_{n+2}=-\frac{1}{3}\left(a_{n+2}-a_n\right)$$

から，数列 $\{a_{n+2}-a_n\}$ は公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列(F 2/2)であり，初項の偶奇性に注意して

$$\therefore a_{n+2}-a_n=\begin{cases}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} & (n=0,\,2,\,4,\,\cdots)\\ 0 & (n=1,\,3,\,5,\,\cdots)\end{cases}$$

・・・⑧

も得られる。⑦，⑧より

(C)変数 $\begin{aligned}a_n&=q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}}\\ b_n&=q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}\end{aligned}$ に着目･･5 点（完答）

(D)三項間漸化式に帰着･･5 点

(E)三項間漸化式を解くために必要な初期状態を全て求める･･5 点（完答）

(F) 三項間漸化式の特性方程式の解 $\alpha^2=\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}\Leftrightarrow\alpha=1,\,-\frac{1}{3}$ に注目した式変形･･10 点（各 5 点×2）

- ⑦式のみを導いて（5 点）から連立二項間漸化式に帰着（5 点）させてもよい。

- ⑧式のみを導いて（5 点）から、階差数列に帰着（5 点）させてもよい。

- どの場合も結果ではなく、方針に加点する。（加点要素(E)に起因する間違いは無視する）

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n=0,\,2,\,4,\,\cdots)\\ 0 & (n=1,\,3,\,5,\,\cdots)\end{cases}$$

を得る。また，$a_{n+1}=b_n$ から

$$b_n=\begin{cases}0 & (n=0,\,2,\,4,\,\cdots)\\ \dfrac{3}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right\} & (n=1,\,3,\,5,\,\cdots)\end{cases}$$

も得られる。以上より，求める確率は

$$T_n=a_n+b_n=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n=2,\,4,\,6,\,\cdots)\\ \dfrac{3}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right\} & (n=1,\,3,\,5,\,\cdots)\end{cases}$$

となる。

$$\text{(答)}\quad T_n=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}\ (n=2,\,4,\,6,\,\cdots) & \text{(G 1/2)}\\ \dfrac{3}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right\}\ (n=1,\,3,\,5,\,\cdots) & \text{(G 2/2)}\end{cases}$$

(G)答‥10 点(各 5 点×2)

(2)[別解]

(2)[別解]　50 点

(H)(A1)(I)(C)(J)(K)(G)

操作 2 回おきの状態の遷移を考える(H)と以下の漸化式が成立する。

(H)　$n\to n+2$ の遷移に着目する方針‥5 点

$$\begin{cases}p_{n+2}^{\mathrm{A}}=\dfrac{1}{3}q_n^{\mathrm{B}}\\ p_{n+2}^{\mathrm{B}}=\dfrac{1}{9}q_n^{\mathrm{A}}+\dfrac{2}{9}r_n^{\mathrm{B}}\\ q_{n+2}^{\mathrm{A}}=p_n^{\mathrm{B}}+\dfrac{2}{9}q_n^{\mathrm{A}}+\dfrac{4}{9}r_n^{\mathrm{B}}\\ q_{n+2}^{\mathrm{B}}=\dfrac{1}{3}p_n^{\mathrm{A}}+\dfrac{2}{9}q_n^{\mathrm{B}}+\dfrac{4}{9}r_n^{\mathrm{A}}+\dfrac{2}{3}s_n^{\mathrm{B}}\\ r_{n+2}^{\mathrm{A}}=\dfrac{2}{3}p_n^{\mathrm{A}}+\dfrac{4}{9}q_n^{\mathrm{B}}+\dfrac{2}{9}r_n^{\mathrm{A}}+\dfrac{1}{3}s_n^{\mathrm{B}}\\ r_{n+2}^{\mathrm{B}}=\dfrac{4}{9}q_n^{\mathrm{A}}+\dfrac{2}{9}r_n^{\mathrm{B}}+s_n^{\mathrm{A}}\\ s_{n+2}^{\mathrm{A}}=\dfrac{2}{9}q_n^{\mathrm{A}}+\dfrac{1}{9}r_n^{\mathrm{B}}\\ s_{n+2}^{\mathrm{B}}=\dfrac{1}{3}r_n^{\mathrm{A}}\end{cases}\quad\text{(A1)}$$

・・・⑨

(A1) $n\to n+2$ の遷移図に基づいた確率漸化式を立式する‥10 点

- **本解の加点要素(A)か、別解の(A1)どちらか一方のみ加点する。**

⑨の 1 行目+4 行目+5 行目+8 行目より，

$$p_{n+2}^{\mathrm{A}}+q_{n+2}^{\mathrm{B}}+r_{n+2}^{\mathrm{A}}+s_{n+2}^{\mathrm{B}}=p_n^{\mathrm{A}}+q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}}+s_n^{\mathrm{B}}$$

が成立する。(1)の結果と合わせて

$$p_n^{\mathrm{A}}+q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}}+s_n^{\mathrm{B}}=\begin{cases}0 & (n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)\\ 1 & (n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots)\end{cases}$$

を得る。よって，

[1] nが奇数のとき

$p_n^{\mathrm{A}},\ q_n^{\mathrm{B}},\ r_n^{\mathrm{A}},\ s_n^{\mathrm{B}}$はすべて0である。(I 1/2)

[2] nが偶数のとき

⑨の 4 行目+5 行目より

$$\begin{aligned}q_{n+2}^{\mathrm{B}}+r_{n+2}^{\mathrm{A}}&=p_n^{\mathrm{A}}+\frac{2}{3}q_n^{\mathrm{B}}+\frac{2}{3}r_n^{\mathrm{A}}+s_n^{\mathrm{B}}\\&=1-\frac{1}{3}\left(q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}}\right)\end{aligned}$$ (C 1/2)

$$\therefore\left(q_{n+2}^{\mathrm{B}}+r_{n+2}^{\mathrm{A}}\right)-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left\{\left(q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}}\right)-\frac{3}{4}\right\}$$ (J 1/2)

$$\therefore\left(q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}}\right)=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{4}\quad\left(\because q_2^{\mathrm{B}}+r_2^{\mathrm{A}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\right)$$ (K 1/2)

である。

また，⑨の 2 行目+3 行目+6 行目+7 行目より，

$$p_{n+2}^{\mathrm{B}}+q_{n+2}^{\mathrm{A}}+r_{n+2}^{\mathrm{B}}+s_{n+2}^{\mathrm{A}}=p_n^{\mathrm{B}}+q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}+s_n^{\mathrm{A}}$$

が成立する。(1)の結果と合わせて

$$p_n^{\mathrm{B}}+q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}+s_n^{\mathrm{A}}=\begin{cases}1 & (n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)\\ 0 & (n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots)\end{cases}$$

を得る。よって，

[1] nが奇数のとき

⑨の 3 行目+6 行目より

$$\begin{aligned}q_{n+2}^{\mathrm{A}}+r_{n+2}^{\mathrm{B}}&=p_n^{\mathrm{B}}+\frac{2}{3}q_n^{\mathrm{A}}+\frac{2}{3}r_n^{\mathrm{B}}+s_n^{\mathrm{A}}\\&=1-\frac{1}{3}\left(q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}\right)\end{aligned}$$ (C 2/2)

$$\therefore\left(q_{n+2}^{\mathrm{A}}+r_{n+2}^{\mathrm{B}}\right)-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left\{\left(q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}\right)-\frac{3}{4}\right\}$$ (J 2/2)

$$\therefore\left(q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}\right)=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{4}\quad\left(\because q_1^{\mathrm{A}}+r_1^{\mathrm{B}}=1+0=1\right)$$ (K 2/2)

である。

[2] nが偶数のとき

$p_n^{\mathrm{B}},\ q_n^{\mathrm{A}},\ r_n^{\mathrm{B}},\ s_n^{\mathrm{A}}$はすべて0である。(I 2/2)

以上の結果から，求める確率は

(I)偶奇の場合分けにより 8 元のうち 4 元は常に 0 になる‥10 点
(各 5 点×2)

(C)変数 $q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}},\ q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}$ に着目
‥5 点(完答)

(J) 公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列に帰着
‥5 点 (完答)

(K) $q_n^{\mathrm{B}}+r_n^{\mathrm{A}},\ q_n^{\mathrm{A}}+r_n^{\mathrm{B}}$ についての初期状態を正しく求める
‥5 点 (完答)

$$T_n = q_n^{\mathrm{A}} + q_n^{\mathrm{B}} + r_n^{\mathrm{A}} + r_n^{\mathrm{B}} = \begin{cases} \dfrac{3}{4} + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \dfrac{1}{4} & (n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots) \\ \dfrac{3}{4} + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \dfrac{1}{4} & (n = 2,\ 4,\ 6,\ \cdots) \end{cases}$$

となる。

(答) $T_n = \begin{cases} \dfrac{3}{4} + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \dfrac{1}{4}\ (n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots) & \text{(G 1/2)} \\ \dfrac{3}{4} + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \dfrac{1}{4}\ (n = 2,\ 4,\ 6,\ \cdots) & \text{(G 2/2)} \end{cases}$

(G)答‥10 点(各 5 点×2)

2 （**６０点**）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

$p=7, 11$について，p^4-1を計算すると，

$$7^4-1=2400=2^5\cdot 3\cdot 5^2$$
$$11^4-1=14640=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 61 \quad \text{(A)}$$

となる。したがって，7^4-1と11^4-1の最大公約数は

$$2^4\times 3\times 5=240$$

となり，題意の整数は 240 の約数であることが必要(B)である。次に，7 以上の素数 p について，p^4-1がつねに 240 の倍数となることを示す。p^4-1を因数分解すると，

$$p^4-1=\left(p^2-1\right)\left(p^2+1\right)$$
$$=\left(p-1\right)\left(p+1\right)\left(p^2+1\right)$$

と変形できる。p が 7 以上の素数であるとき，$p-1, p+1$は連続する 2 つの偶数となるから，その積は 8 の倍数であり，p^2+1も偶数となることと合わせると，p^4-1は 16 の倍数である(C)。また，連続する 3 整数 $p-1, p, p+1$のいずれか 1 つは必ず 3 の倍数となるが，p は 3 の倍数でないため，$p-1, p+1$のいずれか片方は必ず 3 の倍数となる。したがって，p^4-1は 3 の倍数である(D)。次に，p を 5 で割った余りについて考える。ここで，p が 7 以上の素数であることから，p は適用な整数kを用いて，

$$p=5k\pm 1, 5k\pm 2$$

のいずれかの形で表すことができる。このとき，

$$p^2=25k^2\pm 10k+1, 25k\pm 20k+4 \quad \text{(複号同順)}$$
$$\therefore p^2=5\left(5k^2\pm 2k\right)+1, 5\left(5k^2\pm 4k\right)+4 \quad \text{(複合同順)}$$

が成り立つ。したがって，p^2を 5 で割った余りは必ず 1 か 4 になる。よって，p^2-1, p^2+1のいずれか片方は必ず 5 の倍数となり，p^4-1は 5 の倍数である(E)。以上より，p が 7 以上の素数であるとき，p^4-1は 240 の倍数であり，与えられた集合の要素すべてを割り切る最大の整数は 240 の倍数である。これと，題意の整数が 240 の約数となることから，求める最大の整数は，

240(F) ……(答)

60 点

(A) $p=7, 11$の場合など 2 つの素数の場合についてp^4-1を正しく素因数分解ができていて‥**10 点(各 5 点×2)**

※ $p=7, 11$でなくても適当な素数の場合で素因数分解を行えていれば可

(B) 求める整数が 240 の約数であるという必要条件を求めて‥**10 点**

(C) を示して‥**10 点**

(D) を示して‥**10 点**

(E) を示して‥**10 点**

(F) 答‥**10 点**

※過程に誤りがある場合は与えない

である。	

3 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

0以上の実数xに対し，$f(x)$を

$$f(x)=\int_0^x\left(e^{2t^2}-4e^{t^2}\right)dt$$

と定めると，

$$f'(x)=e^{2x^2}-4e^{x^2}=e^{x^2}\left(e^{x^2}-4\right)$$

となるから，$f(x)$の増減は次表のようになる(A)。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	＋
$f(x)$		□		□

$1.1^2<1.38<2\log 2<1.40<1.2^2$ より $1.1<\sqrt{2\log 2}<1.2$ であるから，0以上の整数nに対して$f(n)$を最小にするようなnは1か2のいずれかである(B)。そこで，

$$I=f(2)-f(1)=\int_1^2\left(e^{2t^2}-4e^{t^2}\right)dt$$

とおき，Iの正負を判定する(C)。ここで，$g(t)=e^{2t^2}-4e^{t^2}$ とおくと，

$$g'(t)=4te^{2t^2}-8te^{t^2}$$

$$\begin{aligned}g''(t)&=4e^{2t^2}+16t^2e^{2t^2}-8e^{t^2}-16t^2e^{t^2}\\&=4e^{t^2}\left(e^{t^2}+4t^2e^{t^2}-2-4t^2\right)\\&=4e^{t^2}\left\{e^{t^2}-2+4t^2\left(e^{t^2}-1\right)\right\}\end{aligned}$$

となる。$1† t† 2$のとき$e^{t^2}‡ e>2$であるから，$g''(t)>0$である。

よって，$y=g(t)$のグラフは$1† t† 2$において下に凸であるから，

60 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)

(A) $f(x)$の増減を調べて‥5 点

・$x‡\sqrt{2\log 2}$で$f(x)$が増加することが読み取れれば加点

・nが整数のまま$f'(n)$を計算している場合も加点してよい

・$y=e^{2t^2}-4e^{t^2}$のグラフを描き，$n‡ 2$ならば$f(n)$は増加することを説明しても可

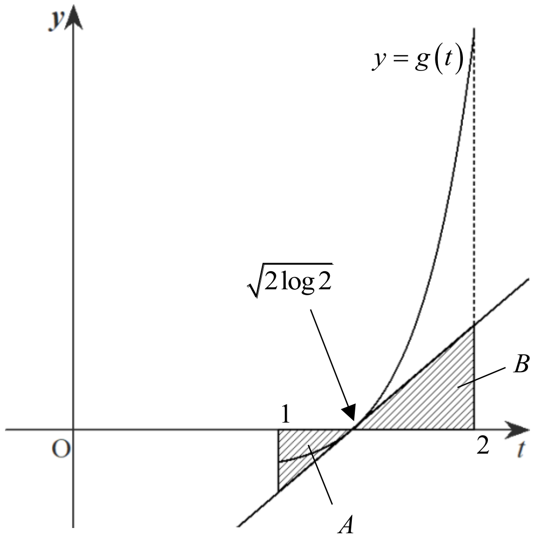
(B) $n=1,\ 2$に絞り込んで‥10 点

(C) $\int_1^2\left(e^{2t^2}-4e^{t^2}\right)dt$の正負を判定する方針‥5 点

(D) $1† t† 2$において点$\left(\sqrt{2\log 2},\ 0\right)$における$y=g(t)$の接線は$y=g(t)$の下側にあることを示して‥10 点

・$g''(t)>0$への言及があれば加点

点 $\left(\sqrt{2\log 2},\ 0\right)$ における $y=g(t)$ の接線は，$y=g(t)$ の下側に存在する(D)。



上図の斜線部の面積をそれぞれ $A,\ B$ とおくと，

$$I=\int_1^{\sqrt{2\log 2}}\left(e^{2t^2}-4e^{t^2}\right)dt+\int_{\sqrt{2\log 2}}^{2}\left(e^{2t^2}-4e^{t^2}\right)dt$$

$$\geqq -A+B$$ (E)

が成立する。このとき，$A,\ B$ に対応する三角形は相似であり，その相似比は

$$\left(\sqrt{2\log 2}-1\right):\left(2-\sqrt{2\log 2}\right)$$

である。したがって，$1.1<\sqrt{2\log 2}<1.2$ を用いると $A<B$ がわかるから，$I>0$ である(F)。以上より，$f(1)<f(2)$ であるから，$f(n)$ の値を最小にするような n は $n=1$ である。

(答) $n=1$ (G)

(E) I を下から評価して‥10 点

(F) $I>0$ を適切に示して‥10 点

(G) 答‥10 点

・$n=1$ の予想には加点なし

・(E)(F)を満足している場合のみ採点

[別解 1]

(I を定義するまでは解答と共通)(A)(B)(C)

$1\leqq t\leqq 2$ のとき

$$e^{2t^2}\geqq \frac{t}{2}e^{2t^2}$$

$$4e^{t^2}\leqq 4te^{t^2}$$

が成立するから，

$$I\geqq \int_1^2\left(\frac{t}{2}e^{2t^2}-4te^{t^2}\right)dt$$ (H)

[別解 1]　60 点 (A)(B)(C)(H)(F)(G)

(A)(B)(C)共通部分‥20 点

(H) $\int_1^2 e^{2t^2}dt$ を下から，$\int_1^2 e^{t^2}dt$ を上から評価して‥20 点(各 10 点×2)

・最終的に $I>0$ が示せないと考えられる甘い評価でも，適切に導出され，かつ，数学的に成立していれば加点

$$=\left[\frac{1}{8}e^{2t^2}-2e^{t^2}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{8}e^8-2e^4-\frac{1}{8}e^2+2e$$

$$=\frac{1}{8}e^4\left(e^4-16\right)+\frac{1}{8}e\left(16-e\right)$$

$$>0 \text{ (F)} \quad (\because 2<e<16)$$

となる。以上より，$f(1)<f(2)$ であるから，$f(n)$ の値を最小にするような n は $n=1$ である。

(答)　$n=1$ (G)

・定積分ではなく，被積分関数の評価に加点しても可

(F) $I>0$ を適切に示して‥10 点

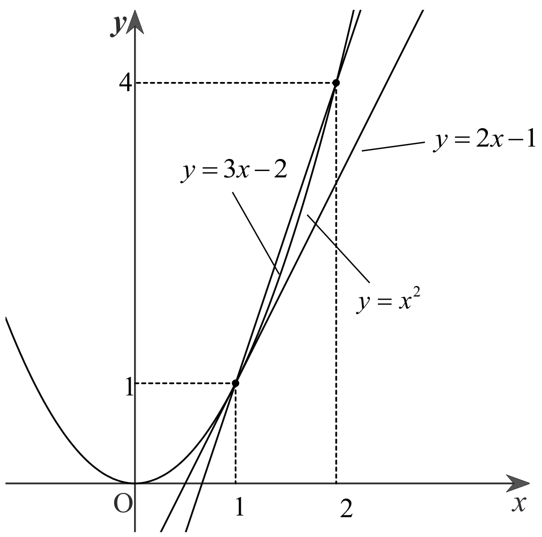
(G)答‥10 点

・$n=1$ の予想には加点なし

・(H)(F)を満足している場合のみ採点

[別解 2]

(I を定義するまでは解答と共通)(A)(B)(C)



$y=3x-2$ は 2 点 $(1,1)$, $(2,4)$ を結ぶ直線，$y=2x-1$ は点 $(1,1)$ における $y=x^2$ の接線である。このとき，$y=x^2$, $y=3x-2$, $y=2x-1$ のグラフは上図のような位置関係にある。すなわち，$1\leqq t\leqq 2$ のとき，

$$2t-1\leqq t^2\leqq 3t-2$$

が成立するから，

$$e^{2t^2}\geqq e^{4t-2}$$
$$4e^{t^2}\leqq 4e^{3t-2}$$

である。よって，

$$I\geqq \int_1^2\left(e^{4t-2}-4e^{3t-2}\right)dt \text{ (H)}$$

[別解 2]　60 点 (A)(B)(C)(H)(F)(G)

(A)(B)(C)共通部分‥20 点

(H) $\int_1^2 e^{2t^2}dt$ を下から，$\int_1^2 e^{t^2}dt$ を上から評価して‥20 点(各 10 点×2)

・最終的に $I>0$ が示せないと考えられる甘い評価でも，適切に導出され，かつ，数学的に成立していれば加点

・定積分ではなく，被積分関数の評価

$$=\left[\frac{1}{4}e^{4t-2}-\frac{4}{3}e^{3t-2}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{4}e^6-\frac{4}{3}e^4-\frac{1}{4}e^2+\frac{4}{3}e$$

$$=\frac{1}{4}e^4\left(e^2-\frac{16}{3}\right)+\frac{1}{4}e\left(\frac{16}{3}-e\right)$$

$$>0 \text{ (F)} \quad \left(\because \frac{4}{\sqrt{3}}<e<\frac{16}{3}\right)$$

となる。以上より，$f(1)<f(2)$であるから，$f(n)$の値を最小にするようなnは$n=1$である。

(答) $n=1$ (G)

に加点しても可

(F) $I>0$ を適切に示して‥10 点

(G)答‥10 点

・$n=1$ の予想には加点なし

・(H)(F)を満足している場合のみ採点

[別解 3]

(Iを定義するまでは解答と共通)(A)(B)(C)

Iについて$u=e^{t^2}$と置換すると，1† t† 2のとき

$$e^{t^2}=u$$
$$\Leftrightarrow t^2=\log u$$
$$\Leftrightarrow t=\sqrt{\log u}$$

であるから，$\dfrac{dt}{du}=\dfrac{1}{2u\sqrt{\log u}}$となり，

$$I=\int_e^{e^4}\left(u^2-4u\right)\cdot\frac{du}{2u\sqrt{\log u}}$$

$$=\int_e^{e^4}\frac{u-4}{2\sqrt{\log u}}du \text{ (I)}$$

となる。ここで，e† u† 4のとき

$$\frac{u-4}{2\sqrt{\log u}} ‡ \frac{u-4}{2\sqrt{\log e}}$$

$$\therefore \frac{u-4}{2\sqrt{\log u}} ‡ \frac{1}{2}(u-4)$$

であり，4† u† e^4のとき

$$\frac{u-4}{2\sqrt{\log u}} ‡ \frac{u-4}{2\sqrt{\log e^4}}$$

$$\therefore \frac{u-4}{2\sqrt{\log u}} ‡ \frac{1}{4}(u-4)$$

であるから，

$$I=\int_e^4\frac{u-4}{2\sqrt{\log u}}du+\int_4^{e^4}\frac{u-4}{2\sqrt{\log u}}du$$

[別解 3]　60 点

(A)(B)(C)(I)(E)(F)(G)

(A)(B)(C)共通部分‥20 点

(I) $u=e^{t^2}$ で適切に置換して‥10 点

$$‡\ \frac{1}{2}\int_e^4 (u-4)\,du + \frac{1}{4}\int_4^{e^4} (u-4)\,du$$ (E)

$$= \frac{1}{4}\Big[(u-4)^2\Big]_e^4 + \frac{1}{8}\Big[(u-4)^2\Big]_4^{e^4}$$

$$= -\frac{1}{4}(4-e)^2 + \frac{1}{8}(e^4-4)^2$$

となる。よって，$2<e<4$ であることを用いれば，

$$I\ ‡\ -\frac{1}{4}(4-2)^2 + \frac{1}{8}(2^4-4)^2 = 17 > 0$$ (F)

である。以上より，$f(1)<f(2)$ であるから，$f(n)$ の値を最小にするような n は $n=1$ である。

(答) $n=1$ (G)

(E) I **を下から評価して‥10 点**

(F) $I>0$ **を適切に示して‥10 点**

(G)答‥10 点

- $n=1$ **の予想には加点なし**
- **(E)(F)を満足している場合のみ採点**

4 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

C_1, C_2 の中心をそれぞれ $\mathrm{O}_1(-2, 0, 0), \mathrm{O}_2(2, 0, 0)$ とし，C_1 と ℓ の接点を $\mathrm{P}(\cos\theta-2, \sin\theta, 0)\ \ (-\pi<\theta\leqq\pi)$(A) とする。$\ell$ が C_2 とも接するとき，C_2 と ℓ の接点は $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ …① を満たす実数 x_0, y_0, z_0 を用いて，$\mathrm{Q}(2+x_0, y_0, z_0)$(B)と表せる。ここで，直線 PQ が C_1, C_2 に接するための条件は， $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}=0\end{cases}$(C) $\Leftrightarrow\begin{cases}(4+x_0-\cos\theta,\ y_0-\sin\theta,\ z_0)\cdot(\cos\theta, \sin\theta, 0)=0\\ (4+x_0-\cos\theta,\ y_0-\sin\theta,\ z_0)\cdot(x_0, y_0, z_0)=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}(4+x_0-\cos\theta)\cos\theta+(y_0-\sin\theta)\sin\theta=0\\ (4+x_0-\cos\theta)x_0+(y_0-\sin\theta)y_0+z_0^2=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0+4)\cos\theta+y_0\sin\theta-1=0\ \ (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)\\ (4-\cos\theta)x_0-\sin\theta y_0+1=0\ \ (\because x_0^2+y_0^2+z_0^2=1)\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\cos\theta+y_0\sin\theta=1-4\cos\theta\\ x_0\cos\theta+y_0\sin\theta=1+4x_0\end{cases}$ であるから， $1-4\cos\theta=1+4x_0$ $\Leftrightarrow x_0=-\cos\theta$(D) …② である。また，このとき， $y_0\sin\theta=\cos^2\theta-4\cos\theta+1$ が成り立つ。ここで，$\sin\theta=0$ とすると等式が成り立たないことから $\sin\theta\neq0$ であり，両辺を $\sin\theta$ で割ることで $y_0=\dfrac{\cos^2\theta-4\cos\theta+1}{\sin\theta}$(E) …③ が得られる。$x_0, y_0$ が②，③を満たすとき①を満たすような z_0 が存在するための条件は， $0\leqq z_0^2$ かつ $\sin\theta\neq0$	60 点 (A) P の座標をパラメータで表して‥5 点 (B) Q の座標をパラメータで表して‥5 点 (C) を求めて‥10 点 (各 5 点×2) (D) x_0 を求めて‥5 点 (E) y_0 を求めて‥10 点 ※ $\sin\theta\neq0$ の確認がない場合は 5 点

$$\Leftrightarrow 0 \leqq 1-x_0^2-y_0^2 \text{(F)} \quad \text{かつ} \quad \sin\theta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2 \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad \sin\theta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta+\left(\frac{\cos^2\theta-4\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2 \leqq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta+\frac{\left(\cos^2\theta-4\cos\theta+1\right)^2}{1-\cos^2\theta} \leqq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+\left(\cos^2\theta-4\cos\theta+1\right)^2 \leqq 1-\cos^2\theta \left(\because 1-\cos^2\theta>0\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta-\cos^4\theta+\cos^4\theta-8\cos^3\theta+16\cos^2\theta-8\cos\theta+2\cos^2\theta+\cos^2\theta \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3\theta-5\cos^2\theta+2\cos\theta \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta\left(1-2\cos\theta\right)\left(2-\cos\theta\right) \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta\left(1-2\cos\theta\right) \geqq 0 \left(\because 2-\cos\theta>0\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leq -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3} \leqq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{(G)} \qquad \cdots(\text{答})$$

となり，これがθの取りうる値の範囲である。このとき，z_0は，

$$z_0=\pm\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$$
$$=\pm\sqrt{\sin^2\theta-\left(\frac{\cos^2\theta-4\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2}$$
$$=\pm\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\sin^4\theta-\left(\cos^2\theta-4\cos\theta+1\right)^2}$$
$$=\pm\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\left(1-\cos^2\theta\right)^2-\left(\cos^4\theta-8\cos^3\theta+16\cos^2\theta-8\cos\theta+1+2\cos^2\theta\right)}$$
$$=\pm\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{-2\cos^2\theta+8\cos^3\theta-18\cos^2\theta+8\cos\theta}$$
$$=\pm\frac{2}{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta\left(1-2\cos\theta\right)\left(2-\cos\theta\right)} \text{(H)}$$

となるから，C_2とℓの接点となりうる点の座標は，

$$\left(x_0+2,\ y_0,\ z_0\right)$$
$$=\left(-\cos\theta+2,\ \frac{\cos^2\theta-4\cos\theta+1}{\sin\theta},\ \pm\frac{2}{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta\left(1-2\cos\theta\right)\left(2-\cos\theta\right)}\right)$$

(I)…(答)

である。

(F) がわかっていて‥10 点

(G) θの範囲を求めて‥5 点（完答）

(H) z_0を求めて‥5 点

(I) 答‥5 点（完答）

- x座標の$+2$を忘れないように注意

5 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

Y は点 P と直線 $x-y=0$ の距離に等しいため，

$$Y=\frac{|t-t\cos t|}{\sqrt{2}}=\frac{t-t\cos t}{\sqrt{2}}$$

である。また，！OPQ に三平方の定理を用いると，

$$X=\sqrt{\left(t^2+t^2\cos^2 t\right)-\frac{(t-t\cos t)^2}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(t+t\cos t)^2}{2}}$$
$$=\frac{t+t\cos t}{\sqrt{2}}$$

である。

(答) $X=\dfrac{t+t\cos t}{\sqrt{2}},\ Y=\dfrac{t-t\cos t}{\sqrt{2}}$ (A)

(1)　10 点 (A)

(A)答‥10 点(各 5 点×2)

・導出過程は不問

・ $X=\dfrac{|t+t\cos t|}{\sqrt{2}},\ Y=\dfrac{|t-t\cos t|}{\sqrt{2}}$ のように絶対値を外していない場合も加点

(2)

$$\frac{dX}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos t-t\sin t)$$

より $t=(2n+1)\pi$ (A)は $\dfrac{dX}{dt}=0$ の解の 1 つであり，

$2n\pi<t<(2n+2)\pi$，$t\neq(2n+1)\pi$ のとき

$$\frac{dX}{dt}=0$$
$$\Leftrightarrow t\sin t-1-\cos t=0$$
$$\Leftrightarrow t-\frac{1+\cos t}{\sin t}=0\ (\because \sin t\neq 0)$$

となる。ここで，$2n\pi<t<(2n+2)\pi$，$t\neq(2n+1)\pi$ を定義域とする関数 $f(t)$ を

$$f(t)=t-\frac{1+\cos t}{\sin t}\ \text{(B)}$$

と定めると，

(2)　25 点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A) $t=(2n+1)\pi$ が解であることを示して‥5 点

(B) $f(t)=t-\dfrac{1+\cos t}{\sin t}$ について調べる方針‥5 点

$$f'(t)=1-\frac{-\sin^2 t-(1+\cos t)\cos t}{\sin^2 t}$$
$$=\frac{-\cos^2 t+\cos t+2}{\sin^2 t}$$
$$=\frac{(2-\cos t)(1+\cos t)}{\sin^2 t}>0$$

であるから，$2n\pi<t<(2n+1)\pi$, $(2n+1)\pi<t<(2n+2)\pi$ のそれぞれにおいて $f(t)$ は単調に増加する(C)。また，

$$\lim_{t\to 2n\pi+0} f(t)=-\infty \text{ (D 1/2)}$$

$$\lim_{t\to(2n+1)\pi} f(t)=\lim_{t\to(2n+1)\pi}\left\{t-\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{(1-\cos t)\sin t}\right\}$$
$$=\lim_{t\to(2n+1)\pi}\left(t-\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)$$
$$=(2n+1)\pi \text{ (D 2/2)} \quad (>0)$$

より，$f(t)=0$ となるような t は $2n\pi<t<(2n+1)\pi$ の範囲にただ1つ存在する(E)。以上より，題意は示された。

(証明終)

(C) $f(t)$ **は単調に増加する‥5 点**

・区間への言及がない場合でも加点

(D)極限値を求めて‥5 点(完答)

・中間値の定理で解の存在を示すために必要な極限値をすべて求めている場合のみ加点

(E)もう 1 つの解の存在を示して‥5 点

・(C)(D)の両方を満足する場合に加点

・(C)(D)のいずれかに不備があれば加点なし

(2)[別解]

$$\frac{dX}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos t-t\sin t)$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-2\sin t-t\cos t)$$

となる。よって，$2n\pi<t<(2n+2)\pi,\ t\neq\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi, \left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi$ のとき

$$\frac{d^2X}{dt^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(t+2\tan t)\cos t$$

となる。ここで，$g(t)=t+2\tan t$ (F)とおくと，$g'(t)=1+\frac{2}{\cos^2 t}>0$ より，$2n\pi<t<\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi<t<\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi$, $\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi<t<(2n+2)\pi$ のそれぞれにおいて $g(t)$ は単調に増加する。さらに，

$$g(2n\pi)=2n\pi \ddagger 0$$

(2)[別解]　25 点 (F)(G)(H)(I)

(F) $g(t)=t+2\tan t$ **について調べる方針‥5 点**

・ $t\neq\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi, \left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi$ **の言及がない場合でも加点してよい，減点も不要**

$$\lim_{t \to \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi \pm 0} g(t) = \mp\infty \quad (複号同順)$$

$$\lim_{t \to \left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi \pm 0} g(t) = \mp\infty \quad (複号同順)$$

$$g\left((2n+2)\pi\right) = (2n+2)\pi > 0$$

より，$g(t)=0$ を満たすような t は $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi < t < \left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi$，$\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi < t < (2n+2)\pi$ の範囲に 1 つずつ存在し，それぞれ β, γ とおく。このとき，$\frac{dX}{dt}$ の増減は下表のようになる(G)。

(G) $\frac{dX}{dt}$ の増減を調べて‥5 点

・$g(t)$ の符号変化は $y=2\tan t$ と $y=-t$ のグラフから考察しても可

・多少の不備があっても，区間 $[2n\pi, \beta]$ で減少，$[\beta, \gamma]$ で増加，$[\gamma, (2n+2)\pi]$ で減少することに言及があれば加点

t	$2n\pi$	$\cdots$	$\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$	$\cdots$	β	$\cdots$
$g(t)$		$+$		$-$	0	$+$
$\cos t$		$+$	0	$-$		$-$
$\frac{d^2X}{dt^2}$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{dX}{dt}$	$(\sqrt{2})$	□		□		□

t	$\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi$	$\cdots$	γ	$\cdots$	$(2n+2)\pi$
$g(t)$		$-$	0	$+$	
$\cos t$	0	$+$		$+$	
$\frac{d^2X}{dt^2}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dX}{dt}$		□		□	$(\sqrt{2})$

ここで，$t=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$ のとき

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \text{(H 1/2)} < 0$$

(H) $\frac{dX}{dt}$ の値を求めて‥5 点(完答)

・中間値の定理で解の存在を示すために必要な値をすべて求めている場

であり，$t=\left(2n+\dfrac{3}{2}\right)\pi$ のとき

$$\frac{dX}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1+\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi\right\}\text{(H 2/2)}>0$$

である。以上より，$\dfrac{dX}{dt}=0$ の解は $2n\pi<t<\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，$\beta<t<\left(2n+\dfrac{3}{2}\right)\pi$ の範囲にそれぞれ1つずつ存在する(I)ため，題意は示された。

(証明終)

合のみ加点

(I) 2 つの解の存在を示して

‥10 点(各 5 点×2)

・(C)(D)の両方を満足する場合に加点

・(C)(D)のいずれかに不備があれば加点なし

・$t=(2n+1)\pi$ が解であることに言及がある場合，導出過程によらず 5 点加点

(3)

$t\neq(2n+1)\pi$ のとき

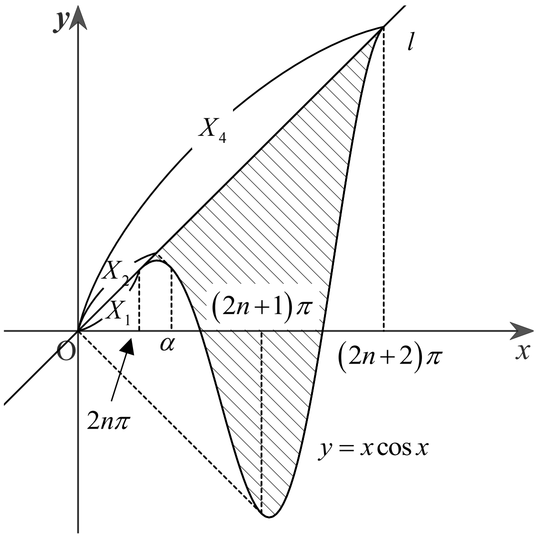
$$\frac{dX}{dt}=-\frac{1}{\sqrt{2}}f(t)\sin t$$

より，$\dfrac{dX}{dt}=0$ の解のうち $t=(2n+1)\pi$ でない方を α とおくと，X の増減は下表のようになる。

t	$2n\pi$	$\cdots$	α	$\cdots$	$(2n+1)\pi$	$\cdots$	$(2n+2)\pi$
$f(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sin t$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{dX}{dt}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
X	X_1	□	X_2	□	$X_3(=0)$	□	X_4

ただし，$t=2n\pi,\ \alpha,\ (2n+1)\pi,\ (2n+2)\pi$ のときの X の値をそれぞれ X_1, X_2, X_3, X_4 とおいた。このとき，V_n は下図の斜線部を l のまわりに1回転させてできる回転体の体積である。

(3)　25 点 (A)(B)(C)(D)(E)



$2n\pi$† t† α, α† t† $(2n+1)\pi$, $(2n+1)\pi$† t† $(2n+2)\pi$ での Y をそれぞれ Y_1, Y_2, Y_3 とおくと，

$$V_n = \pi\int_{X_1}^{X_2}(Y_1)^2 dX - \pi\int_{X_3}^{X_2}(Y_2)^2 dX + \pi\int_{X_3}^{X_4}(Y_3)^2 dX \text{ (A)}$$

$$= \pi\int_{2n\pi}^{\alpha} Y^2\frac{dX}{dt}dt - \pi\int_{(2n+1)\pi}^{\alpha} Y^2\frac{dX}{dt}dt + \pi\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} Y^2\frac{dX}{dt}dt$$

$$= \pi\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} Y^2\frac{dX}{dt}dt$$

$$= \pi\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi}\frac{t^2(1-\cos t)^2}{2}\cdot\frac{(1+\cos t - t\sin t)}{\sqrt{2}}dt \text{ (B)}$$

となる。ここで，$u = t - 2n\pi$ と置換すると，

$$V_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(u+2n\pi)^2(1-\cos u)^2 \{1+\cos u-(u+2n\pi)\sin u\}du \text{ (C)}$$

となる。このとき，被積分関数は n について 3 次以下の整式であるから，V_n も n について 3 次以下の整式である(D)。V_n の n^3 の係数を計算すると

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(2\pi)^2(1-\cos u)^2(-2\pi\sin u)du \text{ (E 1/2)}$$

$$= -2\sqrt{2}\pi^4\int_0^{2\pi}(1-\cos u)^2\sin u\,du$$

$$= -2\sqrt{2}\pi^4\left[\frac{1}{3}(1-\cos u)^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= 0 \text{ (E 2/2)}$$

となるから，題意は示された。

(A) V_n **を適切に立式して‥5 点**

・多少の不備があっても，曲線の折り返しを考慮し 3 つの部分に分けて立式したことが読み取れれば加点

・ X **の増減表など折り返しの存在に関する説明の有無は不問**

(B) V_n **を** t **の積分で表して‥5 点**

・(A)を満足していない場合でも加点，以降も採点対象

(C) $u = t - 2n\pi$ **で適切に置換して‥5 点**

・ $u = t-(2n+1)\pi$ **でも可**

(D) V_n **の次数が 3 次以下である‥5 点**

・「V_n **の次数が 3 次である」なども可**

(E) V_n **の** n^3 **の係数を適切に立式し，**

(証明終)

0 になることを適切に示して‥5 点（完答）

・立式の際，$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ などの定数は省略可