医学部 82 大学判定テスト（2023 年 6 月 25 日実施）

採点基準　数学

$\boxed{4}$（配点 50 点）

(1)　（8 点）それぞれ完答のみ（2 点ずつ）。

(2)　（8 点）それぞれ完答のみ（2 点ずつ）。

(3)　（8 点）

正しく議論ができて 8 点（$a_{n+2}+c_{n+2}=b_{n+1}+d_{n+1}$ まで導けたら 4 点）。

$\boxed{\text{別解}}$

遷移図から，n が奇数のときは状態 N_1 または N_3 のいずれかであり，n が偶数のときは状態 N_0 または N_2 のいずれかであることがわかる。したがって，n が奇数のときは $a_n+c_n=0$ であり，n が偶数のときは $a_n+c_n=1$ であるから $a_{n+2}+c_{n+2}=a_n+c_n$ である。（正しく議論ができて 8 点）

(4)　（16 点）

$a_{2m+2}=\dfrac{1}{9}a_{2m}+\dfrac{2}{9}$ が得られて 8 点（これが得られてなくても $a_{2m+2}=\dfrac{1}{3}\left(a_{2m}+\dfrac{2}{3}c_{2m}\right)$ または $a_{n+2}=\dfrac{1}{3}\left(a_n+\dfrac{2}{3}c_n\right)$ が得られていれば 4 点を与える）。あるいは $a_{2m+2}=a_{2m}-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{9}\right)^m$ でもよい。

$a_{2m+2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{9}\left(a_{2m}-\dfrac{1}{4}\right)$ と変形できて 4 点。

結果に 4 点。$a_{2m}=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{m-1}+\dfrac{1}{4}$ でもよい。

(5)　（10 点）

求める確率が $\dfrac{a_2\times a_{2m-2}}{a_{2m}}$ であることがわかって 5 点。（この式が得られてなくても，事象 $A,\ B$ を正しく定義した上で求める確率が $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ であることがいえていれば 2 点を与える）

結果に 5 点。

$\boxed{5}$（配点 50 点）

(1)　（5 点）

$f'(x) = (2-x)e^{-x}$ または $f'(t) = (2-t)e^{-t}$ が書けて 2 点。

$y = (2-t)e^{-t}x + (t^2-t-1)e^{-t}$ が正しく書けて 3 点。

（$y = (2-t)e^{-t}(x-t) + (t-1)e^{-t}$ が書けていれば 2 点を与える）

(2)　（20 点）

【$e^x > \dfrac{x^n}{n!}$ の証明】

(i) $g_1(x)$ が単調増加であることの議論が正しくて 3 点。その上で，「$g_1(0) = 1 > 0$ なので $g_1(x) > 0$」が言えて 5 点。

（増減や端点の議論がなく「明らかに $e^x > x$ である」など議論不足の場合は 3 点を与える）

(ii) $g_{k+1}(x)$ が単調増加であることの議論が正しくて 3 点（② の仮定を根拠にしていることが答案から読み取れなければこの 3 点は与えない）。その上で，「$g_{k+1}(0) = 1 > 0$ なので $g_{k+1}(x) > 0$」が言えて 5 点。

$g_1(0)$ や $g_{k+1}(0)$ の値が誤っている場合はそれぞれ 2 点減。

$\boxed{\text{別解}}$

(ii) では以下のように定積分を用いてもよい。

$n = k$ のときに $e^x > \dfrac{x^k}{k!}$ $(x > 0)$ が成り立つと仮定すると，$t > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^x dx > \int_0^t \frac{x^k}{k!} dx \\
\iff& \left[e^x\right]_0^t > \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right]_0^t \\
\iff& e^t - 1 > \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

が成り立つので，$e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} + 1 > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ となり $n = k+1$ でも成り立つ。

（別解の採点基準：議論が正しくて 8 点。定積分でなく不定積分の場合は 3 点を与える）

【$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ の証明】

議論が正しくて 4 点。

（部分点として，$e^x > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ もしくは $0 < e^{-x} < \dfrac{(n+1)!}{x^{n+1}}$ が導けて 2 点を与える。また，「はさみうちの原理」を利用しようとしている場合，利用の方法に誤りがあっても 2 点を与える）

(3)　（25 点）

t の方程式 $b = (2-t)e^{-t}a + (t^2-t-1)e^{-t}$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件を考えればよい，という方針に対して 5 点。ただし，

- 「異なる 2 つの実数解」といった言葉が明記されていなくても，その後の答案において 2 つの実数解をもつ条件を求めようとしていると認められればこの 5 点を与える。

- (1) で求めた接線の方程式や，それに $(a,\ b)$ を代入してできる方程式が誤っていても，上記の方針をとっていると認められればこの 5 点を与える。

$h(t)=\{t^2-(a+1)t+2a-1\}e^{-t}$ について，増減と極限が正しくて 9 点。この 9 点について部分点は以下の通り。

- $h'(t)=-(t-3)(t-a)e^{-t}$ が得られて 3 点。
- $t=3,\ a$ が得られた上で，$h(t)$ の増減が正しくて 3 点（もし，$h(3)$ や $h(a)$ の値を間違えていたり，$h(3)$ の正負を見極めていなくても，この 3 点は与える)。
- $\displaystyle\lim_{t\to\infty}h(t)=0,\ \lim_{t\to-\infty}h(t)=\infty$ が両方得られて 3 点（式で明記していなくても，これらの極限を読み取れるグラフが描けていればこの 3 点を与える)。

$h(3)$ の「正」「0」「負」で場合分けして，正しい結果が得られて 11 点。この 11 点について部分点は以下の通り。

- 「$h(3)$ の値」「$h(a)$ の値」「$\displaystyle\lim_{t\to\infty}h(t)$」「$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}h(t)$」に間違いがあるかどうかに関わらず，$h(3)$ が「正」「0」「負」のいずれであるかによる場合分けが必要だと気付いていれば 4 点（場合分けが必要だと気付いたが，「0」「正」「負」のうちいずれかを見落とすなど不完全な場合は 2 点を与える)。
- それぞれの場合分けに対応する b の条件がすべて正しくて 7 点。何らかの誤りがある場合の部分点は，場合分けに不備があっても（場合分けしていなくても）以下の通りとする。

  ア　「$3<a<5$ のとき $b=(-a+5)e^{-3},\ (a-1)e^{-a}$ 」が得られて 2 点。
  イ　「$a=5$ のとき $b=(a-1)e^{-a}$ 」が得られて 2 点。$b=4e^{-5}$ でもよい。
  ウ　「$a>5$ のとき $b=(a-1)e^{-a},\ (-a+5)e^{-3}<b\leqq 0$ 」が得られて 2 点。

  ア, イ, ウのそれぞれにおいて，b の条件が正しいが，a の条件に不備がある，または a の条件への言及そのものがない場合，それぞれ 2 点→ 1 点に減ずる。
  例えば，

  ▶ 場合分けを全くしておらず，「$b=(-a+5)e^{-3},\ (a-1)e^{-a}$ 」のみを結論としている場合は $1+0+0=1$ 点。
  ▶ ア, ウの a の範囲が逆になっており，それ以外は正しい場合は $1+2+1=4$ 点。

  また，$h(3)=(-a+5)e^{-3}$ または $h(a)=(a-1)e^{-a}$ が正しく得られていないが，a の条件によって正しくア, イ, ウの場合分けができていれば 7 点中の 3 点を与える。

別解

b を分離せずに $h(t)=\{t^2-(a+1)t+2a-1\}e^{-t}-b$ として $h(t)$ の増減を考える方法も考えられる。

その場合の採点基準も上に準ずる。本解で「$h(3)$ の「正」「0」「負」で場合分け」は，別解では「$(-a+5)e^{-3}$ の「正」「0」「負」で場合分け」となる。

注釈

厳密には，「接線の本数は接点の x 座標である t の個数に等しい」といえるためには $f(x)$ の凹凸を調べることなどにより複接線が存在しないことを議論する必要があるが，ここではその議論がなくても減点はしない。