医学部 82 大学判定テスト（2023 年 10 月 29 日実施）

採点基準　数学

$\boxed{4}$（配点 50 点）

(1)　（8 点）

$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{u}|^2|\overrightarrow{v}|^2-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2}$，あるいは $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\angle\mathrm{UOV}$ などの立式が正しくて 4 点。

結果が正しくて 4 点。

（立式で $\dfrac{1}{2}$ 倍が抜けている場合，「$\sqrt{14}$」が得られていれば 2 点）

(2)　（16 点）

「$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{u}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{v}=0$」あるいは「$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$」が書けていて 5 点。（「$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ と垂直」と書いているだけ，あるいは「$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\ /\!/\ (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$」と書いているだけなら 3 点）

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{u}=0$ から $7+3p+2q=0$ が得られて 2 点。（$-14-6p-4q=0$ など，各係数の定数倍の形でも可）

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{v}=0$ から $14+4p+5q=0$ が得られて 2 点。（同上）

$p=-1,\ q=-2$ が得られて 7 点。（一方のみが正しければ 3 点）

(3)　（6 点）

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{3}$ が得られて 3 点（ここは成分表示でもよい）。

正しい結果が得られて 3 点。

(4)　（8 点）

領域 D が正しく把握できて 2 点。

S を求める式が正しくて 2 点。

正しい結果が得られて 4 点。

（領域 D を，平行四辺形でなくその半分の三角形と誤解していた場合，面積 $\dfrac{\sqrt{14}}{9}$ が得られていたら 8 点中の 4 点を与える）

(5)　（12 点）

題意の立体が「A を頂点とし D を底面とする四角錐」と正しく把握できて 2 点。（言葉で表現できていなくても図などで正しく把握していると認められれば 2 点を与える）

立体が正しく把握できていなくても（例えば三角錐と誤解していても），何が高さとなるか正しく把握した上で高さを求める方針が正しくて 4 点，高さ $\dfrac{4}{3}\sqrt{14}$ が得られて 4 点（有理化などはしていなくても OK）。

正しい結果が得られて 2 点。

別解

題意の立体の高さは，「点と平面の距離」の公式を用いても求められる．今の場合，領域 D を含む平面の方程式は $x-3y-2z-\dfrac{5}{3}=0$ と求まるので，この平面と点 $\mathrm{A}(2,\ 3,\ 5)$ との距離，すなわち立体の高さは $\dfrac{\left|2-9-10-\dfrac{5}{3}\right|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{14}$ と求まる．

$\boxed{5}$（配点 50 点）

(1)　（8 点）$x(-t)$ を正しく変形して $y(t)$ に等しいことが言えて 4 点。

$y(-t)$ を正しく変形して $x(t)$ に等しいことが言えて 4 点。

(2)　（16 点）

$\dfrac{dy(t)}{dt} = -2\sin 2t + \cos t$ が得られて 2 点。

$\dfrac{dy(t)}{dt} = 0$ から，「$\cos t = 0$ または $\sin t = \dfrac{1}{4}$」が得られて 2 点。（$\cos t = 0$ の抜けは 1 点減）

$y(t)$ の増減が正しくて 2 点。（$t = \alpha$ を境に y が「増」から「減」に転じていることが言えていれば，その他の不備があっても 2 点を与える）

$y(\alpha) = \dfrac{9}{8}$ が得られて 5 点。$x(\alpha) = \dfrac{5}{8}$ が得られて 5 点。

（結果の座標 $\left(\dfrac{5}{8},\ \dfrac{9}{8}\right)$ を書き忘れているか書き写し間違えているなどの不備は 1 点減)

【別解】の場合

$\sin t$ の 2 次式として平方完成が正しくできて 4 点。

t の範囲，または $\sin t$ の範囲に言及し，$\sin t = \dfrac{1}{4}$ となる t が存在することが言えて 2 点。

y の最大値 $\dfrac{9}{8}$ が得られて 5 点。そのとき $x = \dfrac{5}{8}$ であることが得られて 5 点。

（結果の座標の不備は 1 点減)

(3)　（10 点）

直線 $y = x$ について対称であることが言えて 2 点。（この対称性について，(3) で言及していなくても，他の設問で言及しているか，あるいは，座標計算をせずに対称性から座標を求めるなど対称性を利用した跡が認められれば，この 2 点を与える）

どういう方針にせよ（例えば対称性に気付かずに $-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で増減を調べていても），$-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における t の増加に対して以下のような変化と座標をもったグラフが描けていれば 8 点。

$$(0,\ -2)\ \nearrow\ \left(\frac{9}{8},\ \frac{5}{8}\right)\ \nwarrow\ (1,\ 1)\ \nwarrow\ \left(\frac{5}{8},\ \frac{9}{8}\right)\ \swarrow\ (-2,\ 0)$$

この 8 点中の部分点等については以下の通り。

- 多少グラフが歪んでいても，$x,\ y$ の増減がグラフ上で正しければ減点しない。例えば，点 $(1,\ 1)$ でグラフが滑らかでなくても OK とする。
- 点 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$ を通ることは明記していなくても減点はしない。
- $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときに，以下のように $(x,\ y)$ が変化することが言えていれば 4 点。（$x,\ y$ の値に不備があってもこの 4 点は与える。また，(3) ではなく (2) の答案中に同様の言及があればこの 4 点は与える。もし $\dfrac{dx}{dt} \leqq 0$ のみが言えていれば 2 点を与える）

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$(x,\ y)$		$\nwarrow$		$\swarrow$	

- $-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ での $(x,\ y)$ の増減が正しいグラフが描けた上で，座標の記入漏れがあれば 1

点減。

(4)　（16 点）

題意の領域が正しく把握できて 2 点。（図上で斜線などによる領域の明示がなくても，積分の立式から領域が正しく把握できていると認められればこの 2 点を与える）

面積を求める方針が正しくて 4 点。

解答の T の定積分において，正しく t の式に変換出来ていたら 3 点。その t の式に対して，$\sin t = u$ と置換した式，または積和公式で変換した式が正しくて 3 点。（領域の把握や面積を求める方針に不備がある場合でもこの $3+3$ 点は与える）

正しい結果が得られて 4 点。