医学部 82 大学判定テスト（2024 年 10 月 27 日実施）

# 採点基準　数学

$\boxed{4}$（配点 50 点）

(1)　（13 点）

- $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$ と答えて 3 点（完答のみ）。
- $l = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$ が得られて 5 点。

  部分点として正弦定理 $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{l}{\sin\theta}$ が書けて 2 点。

- $m = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right)$ が得られて 5 点。

  部分点として正弦定理 $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{m}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right)}$ が書けて 2 点。

(2)　（18 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角が $\theta$ であることを示せて 6 点。

  部分点として，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角が $\angle\mathrm{PAC}$ に等しいことが言えて 2 点。

- P の座標を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表せて 12 点。

  部分点として，
  $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が言えて 2 点，
  $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}l,\ -\dfrac{1}{2}l\right)$ が言えて 2 点，
  $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が $x$ 軸の正の向きに対して $\theta - \dfrac{\pi}{6}$ の角をなすことが言えて 2 点，
  $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right),\ \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ が言えて 2 点，
  結果に 4 点。

別解

P の座標については複素数平面で考えてもよい。点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{P}(z)$ とする。

A を中心に，O(0) を $-\pi + \theta$ 回転させて，A からの距離を $\dfrac{1}{l}$ 倍すると P となる。

すなわち，

$$z - \alpha = \frac{1}{l}(0 - \alpha)\left\{\cos(-\pi + \theta) + i\sin(-\pi + \theta)\right\} \cdots (\bigstar)$$

$$\iff z = \alpha + \frac{\alpha}{l}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

となる。$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l - \dfrac{1}{2}li = \sin\theta - \dfrac{i}{\sqrt{3}}\sin\theta,\ \dfrac{\alpha}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ を用いると

$$z = \frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + i\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

が得られる。（以下略）

【別解に対する部分点】
$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}l-\dfrac{1}{2}li$ が言えて 2 点，
$\arg\dfrac{z-\alpha}{0-\alpha}=-\pi+\theta$ に相当することが言えて 2 点，
（★）に相当する式が書けて 4 点。
結果に 4 点。

(3)　（19 点）

方程式 $\dfrac{x^2}{3}+3y^2=1$ が得られて 12 点，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<x\leqq\sqrt{3}$ など範囲に関する正しい結果が得られて 7 点。

部分点として，
$X$ を cos で合成し，$Y$ を sin で合成することで $\theta$ を消去する，という方針に 3 点，
$X=\sqrt{3}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ が得られて 2 点，
$Y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ が得られて 2 点。
範囲については，$\dfrac{1}{2}<\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$，または $\dfrac{1}{2}<\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$ が得られて 3 点。
解説本文の【別解】の方針の場合，
$\sin\theta$，$\cos\theta$ の連立方程式として解く，という方針に 3 点，
$\cos\theta=\dfrac{X-3\sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}}$ が得られて 2 点，$\sin\theta=\dfrac{X+\sqrt{3}Y}{2}$ が得られて 2 点。

$\boxed{5}$（配点 50 点）

(1)　（15 点）

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ が得られて 3 点。

$f''(x) = \dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ $\left(= \dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}\right)$ が得られて 3 点。

増減表において，

$f'(x)$ の符号変化（$x=0$ で 0，$x>0$ で正）が正しくて 2 点，

$f''(x)$ の符号変化（$0 \leqq x < 1$ で正，$x=1$ で 0，$x>0$ で負）が正しくて 2 点，

その上で，$f(x)$ の矢印の変化が正しくて 5 点。

(2)　（5 点）

$y_t$ が正しくて 5 点。

部分点として，$L$ の方程式が正しくて 3 点。

(3)　（13 点）

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ の結果が正しくて 5 点。

部分点として，

$x = \tan\theta$ と置換し，$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$，および区間の対応が正しくて 3 点。

- $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の結果が正しくて 8 点。

部分点として，

不定積分について，部分積分を用いた以下の変形ができて 2 点。

$$\int \log(x^2+1)dx = x\log(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

その上で，$\dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2 - \dfrac{2}{x^2+1}$ と変形できて 3 点。

結果に 3 点。

(4)　（17 点）

$S_2 - S_1 = 2\displaystyle\int_0^t \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{2t}{t^2+1}$ が得られて 10 点。

以下，部分点について。

$S_2 - S_1 = \displaystyle\int_\alpha^t \{f(x) - y_t\}dx - \int_0^\alpha \{y_t - f(x)\}dx$ と書けて 3 点。

さらに $S_2 - S_1 = \displaystyle\int_0^t \{f(x) - y_t\}dx$ と書けて 3 点。

$\displaystyle\int_0^t f(x)dx$ を $t\log(t^2+1) - 2t + 2\displaystyle\int_0^t \frac{1}{x^2+1}dx$ と変形できて 2 点。

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}$ が得られて 5 点。

部分点として，

$t = \tan\beta \ \left(0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおいて，$\displaystyle\int_0^t \frac{1}{x^2+1}dx = \beta$ が導けていれば 2 点。

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S_2 - S_1) = \pi$ が得られて 2 点。