2021 年度第 2 回 8 月京大本番レベル模試　（2021 年 8 月 29 日実施）

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第 1 問　(30 点満点)

- 背理法の仮定に 3 点
- 上記の仮定の下， mod 3 で $a \equiv 1$ または $a \equiv 2$ であることを述べて 6 点
- 上記の仮定の下， mod 3 で $a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 1,\ c^2 \equiv 1$ となることを述べて 7 点
- 上記の仮定の下では， $p = 3$ となることを述べて 7 点
- 残りの証明に 7 点

第 2 問　(30 点満点)

- 三角形 ABC の内心 I の位置を分点で説明して 6 点
- $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表して 6 点
- $\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表して 6 点
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値に 3 点
- 残りの計算と答えに 9 点

第 3 問　(30 点満点)

- 7 点に配置される数字の場合の数と，それらが同様に確からしいことを述べて 3 点
- 点 G に配置される数字が 1, 4, 7 であることを述べて 6 点
- 点 G に配置される数字が 1 のとき，対角線上に並ぶ数値の組を記述して 3 点
- 点 G に配置される数字が 1, 4, 7 のとき，対角線上に並ぶ数値の組の個数をそれぞれ求めて 12 点(各 4 点)
- 答えに 6 点

第 4 問　(30 点満点)

(1)　(配点 12 点)

- 円と曲線の式から y を消去し， x の 6 次方程式の形に整理して 4 点
- 上記の 6 次方程式の左辺を因数分解して 4 点
- 曲線の第 1 象限にある部分の座標を吟味した上で， E と K の交点の座標を求めて 4 点

(2)　(配点 18 点)

- E と K で囲まれた図形を図示して 2 点
- E と K の交点を A, B としたとき，$\angle$AOB の大きさを求めて 4 点
- S を求める立式に 4 点
- S を求める計算と答えに 8 点

第 5 問　(30 点満点)

- 座標の設定を行った上で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のようにベクトルで表現を行って 6 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定まる点 Q を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + u\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となることを述べて 6 点
- 上記の点 Q の存在範囲を図示して 6 点
- 上記の点 P の存在範囲を図示して 6 点
- 答えに 6 点

2021 年度第 2 回 8 月京大本番レベル模試　（2021 年 8 月 29 日実施）

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】（200 点満点）

第 1 問　(30 点満点)

- $z_{n+2}=\alpha z_n$ を導いて 6 点
- $z_{2j-1}=\alpha^{j-1}$, $z_{2j}=\dfrac{1}{2}\alpha^{j-1}$　(j は自然数)を求めて 6 点
- 求める和を偶奇で分けた和の形に表して 6 点
- 途中計算と答えに 12 点

第 2 問　(30 点満点)

- $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ となる場合の数が ${}_n\mathrm{H}_3$ $(={}_{n+2}\mathrm{C}_3)$ となることを述べて 6 点
- $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ となる確率を求めて 6 点
- $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 > a_4$ となる場合の数が $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ となる場合の数から $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ となる場合の数を引いたものであることを述べて 6 点
- $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 > a_4$ となる確率を求めて 6 点
- 答えに 6 点

第 3 問　(35 点満点)

- 三角形 ABC の内心 I の位置を分点で説明して 4 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表して 6 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表して 2 点
- 三角形 ABC の外接円の半径を求めて 6 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で表して 6 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の値をそれぞれ求めて 6 点(各 2 点)
- 答えに 5 点

第 4 問　(35 点満点)

(1)　(配点 12 点)

- I_{n+1} を部分積分を用いて計算して 6 点
- I_{n+1} を n と I_n を用いて表して 2 点
- I_1 を求める計算と答えに 4 点

(2)　(配点 23 点)

- (1)で求めた I_{n+1} を変形して和が考えられる項の差の形に変形して 6 点
- $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} = \dfrac{1}{e} + \dfrac{(-1)^n I_n}{en!}$ $(n \geqq 2)$ を導いて 6 点
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e-1}{en!} = 0$ となることを示して 6 点
- 証明の残りに 5 点

第 5 問　(35 点満点)

- 座標の設定を行った上で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のようにベクトルで表現を行って 4 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定まる点Qを考え，その存在範囲を図示して 4 点
- 上記の点Pの存在範囲を図示して 4 点
- 上記の点Pの存在範囲と曲線 $xy = k$ が共有点をもつための条件について述べ，曲線 $xy = 6$ を考えていると 4 点
- 上記の点Pの存在範囲が領域 $xy \leqq 6$ に含まれることを示して 4 点
- pq の最大値を求めて 3 点
- 曲線 $xy = -\dfrac{121}{24}$ と直線 $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{11}{3}$ について言及して 4 点
- 上記の点Pの存在範囲が領域 $xy \geqq -\dfrac{121}{24}$ に含まれることを示して 5 点
- pq の最小値を求めて 3 点

第 6 問　(35 点満点)

- a^k を 5 で割った余りを，k を 4 で割った余りに対応させて求めて 6 点
- 題意を $k = a, a^2, \cdots\cdots$ を 4 で割った余りがちょうど 2 種類となる a の条件に言い換えて 6 点
- $a = 5m + 2$ のようにおいたとき，$a^n \equiv (m+2)^n \pmod{4}$ であることを述べて 6 点
- 上記の m に対し，$m \equiv 0, 1 \pmod{4}$ のとき余りが 2 種類という a の条件を満たし，$m \equiv 2, 3 \pmod{4}$ のとき余りが 2 種類という a の条件を満たさないことを示して 12 点(各 3 点)
- 答えに 5 点