2021 年度第 3 回 10 月京大本番レベル模試　(2021 年 10 月 24 日実施)

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(150 点満点)

第 1 問　(30 点満点)

- 箱の中に白いカードが残らない 2 つの場合を説明して 6 点
- 1 回目に白いカードを取り出す確率を求めて 4 点
- 1 回目に数字 k が書かれたカードを取り出し，次いで取り出した k 枚のカードの中に白いカードが含まれている場合の確率を求めて 10 点
- 上記の確率の和と答えに 10 点

第 2 問　(30 点満点)

(1)　(配点 10 点)

- Q の座標を $(q,\ q^2)$ のように設定し，q を p で表して 6 点
- Q の x 座標の最大値を求めて 4 点

(2)　(配点 20 点)

- Q の x 座標が最大となるときの P, Q の座標を求めて 2 点
- 直線 l, n の方程式，およびその交点 R の座標を求めて 6 点
- 直線 l, n と y 軸の交点の座標を求めて 2 点
- S_1 , S_2 を求める式と答えに 8 点(各 4 点)
- 答えに 2 点

第 3 問　(30 点満点)

- △ABC＝△AOC から△OAB＋△OBC＝2△OAC を導いて 10 点
- △OAB, △OBC, △OAC の面積を上記に代入した式に 4 点
- 上記の θ, 2θ, 3θ の混合の式を θ のみの式に直して 4 点
- 上記からさらに $\cos\theta$ の方程式を導いて 4 点
- 残りの計算と答えに 8 点

第 4 問　(30 点満点)

(1)　(配点 26 点)

- $b-a=1$ から $(m-n)^2=2n^2-1$ …… ① を導いて 3 点
- 上記から $m=n+\sqrt{2n^2-1}$ を導いて 3 点
  (①を経由せずに $b-a=1$ から $m=n+\sqrt{2n^2-1}$ を導いた場合，①の式変形に該当する部分の配点は下記の★に加える)
- b が 3 桁の整数であることから n の不等式を求めて 3 点
- $n\leqq\sqrt{2n^2-1}<2n$ から $2n^2\leqq n\left(n+\sqrt{2n^2-1}\right)<3n^2$ を導いて 4 点
- 上記の 2 つの不等式を満たす自然数 n が存在するための必要条件に 4 点
- $2n^2-1$ が奇数であり，平方数であること(★)を述べて 3 点
- 必要条件から得られる n^2 の値をすべて求めて 3 点
- a, b が 3 桁の整数になることの確認と答えに 3 点

(2)　(配点 4 点)

- 答えに 4 点

第 5 問　(30 点満点)

- P, Q の位置ベクトルを s, t などのパラメータで表して 2 点
- M の位置ベクトルを上記のパラメータで表して 6 点
- 上記のもと $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{EF}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ となる点 E, F, G の設定に 6 点
- M の存在範囲の説明に 6 点
- 線分 OM の全体がなす立体 K を図示して 6 点
- 体積の計算と答えに 4 点

2021年度第3回10月京大本番レベル模試　(2021年10月24日実施)

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は原則として解答の配点に準ずる

【理系】(200点満点)

第1問　(30点満点)

- ＰをC上の点として座標を設定し，この点がE上の点でもある条件を述べて6点
- ＰにおけるCとEの接線の傾きが等しいとして条件を求めて12点
- 上記の2つの条件式からabの値を求めて6点
- 答えに6点

第2問　(30点満点)

- 箱の中に白いカードが残らない2つの場合を説明して6点
- 1回目に白いカードを取り出す確率を求めて4点
- 1回目に数字kが書かれたカードを取り出し，次いで取り出したk枚のカードの中に白いカードが含まれている場合の確率を求めて10点
- 上記の確率の和と答えに10点

第3問　(35点満点)

- Ｑの座標を(q, q^2)のように設定し，qをpで表して6点
- 直線l, nの方程式を求めて4点(各2点)
- 直線l, nの交点Ｒのx座標，y座標をそれぞれpで表して6点
- 点Ｑ, Ｒの座標をそれぞれpで明記して2点(各1点)
- 点Ｇの座標をpで表して2点
- 点Ｇの軌跡の式を求めて4点
- 点Ｇの軌跡を表す関数の増減を調べて7点
- 点Ｇの軌跡の図示に4点

第4問　(35点満点)

- $a+b=p$ (pは素数)とおくなど，条件(ii)を考慮したことが読み取れて2点
- 条件(i)よりa, bはどちらも$a+b$で割り切れないことを述べて4点
- a^3+b^3を$a+b$をくくり出した形で表して4点
- $a+b$が$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3a(a+b)+3a^2$の約数であることを説明して5点

- $a+b=3$ であることを説明して 4 点
- a^2-3a+3 が平方数でなければならないことを示し，それを文字で設定して 4 点
- 上記の 2 次の不定方程式から積の組合せの連立方程式を立てて 8 点
- すべての条件を満たすことを確認した上で答えを述べて 4 点

第 5 問　(35 点満点)

【解答】の方針による答案の配点

- $f(z)-zf(z)$ に $z=\alpha$ を代入した式に 5 点
- $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3=-\alpha^4$ を導いて 5 点
- $(1-\alpha)f(\alpha)=-5\alpha^4$ を導いて 2 点
- $(1-\alpha^2)f(\alpha^2)=-5\alpha^3$, $(1-\alpha^3)f(\alpha^3)=-5\alpha^2$, $(1-\alpha^4)f(\alpha^4)=-5\alpha$ を導いて 3 点(各 1 点)
- 上記の積を考えて 5 点
- x^5-1 の因数分解から $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)=5$ を導いて 10 点
- 答えに 5 点

【別解 1】の方針による答案の配点

- $\alpha^4=-\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1$ を導いて 5 点
- $f(\alpha^2)$, $f(\alpha^3)$, $f(\alpha^3)$ をそれぞれ α の 4 次以下の項の和の形で表して 3 点(各 1 点)
- $f(\alpha)$, $f(\alpha^2)$, $f(\alpha^3)$, $f(\alpha^3)$ のいずれか 2 つずつの積をそれぞれ α の 4 次以下の項の和の形で表して 20 点(各 10 点)
- 残りの計算と答えに 7 点

【別解 2】の方針による答案の配点

- α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ を利用し， $\alpha^3=(\overline{\alpha})^2$, $\alpha^4=\overline{\alpha}$ を用いる方針に 2 点
- $f(\alpha^3)=\overline{f(\alpha^2)}$, $f(\alpha^4)=\overline{f(\alpha)}$ から $N=f(\alpha)f(\alpha^2)\overline{f(\alpha)f(\alpha^2)}$ となることを述べて 10 点
- $\alpha^5=1$ から $f(\alpha)f(\alpha^2)$ を α の 3 次以下の項の和の形で表して 17 点
- 残りの計算と答えに 6 点

第 6 問　(35 点満点)

- △BCD の内接円の半径，正四面体 ABCD の高さに 3 点(図に記されている場合も可)
- 線分 AO 上に $\mathrm{OT}=t$ $(0\leqq t\leqq\sqrt{2})$ となる点 T をとり，T を通り AO に垂直な平面 α_t を設定して(断面を考える設定に) 2 点
- α_t による K の断面， L の断面，および K と L の共通部分断面の説明に 5 点
- 断面積が考えられるように角 θ を設定し， θ で断面積を表して 5 点
- 上記の角 θ と t の関係を求めて 3 点
- 体積 V を上記の θ の定積分で表して 6 点
- 定積分の計算と答えに 11 点