2022 年度第 1 回京大本番レベル模試

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(150 点満点)

第 1 問　(30 点満点)

- $\{S_n\}$ の階差をとって考える方針に 5 点
- $a_{n+1} - a_1 = n(a_{n+1} - a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$)を導いて 5 点
- 上記の式の左辺を $\{a_n\}$ の階差の和として表して 5 点
- $\{a_n\}$ の階差数列が定数数列となることを示し，証明を完了して 15 点

第 2 問　(30 点満点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表して 3 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\vec{c}$ のような設定の下で，$\overrightarrow{\mathrm{GP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表して 6 点(各 2 点)
- $\overrightarrow{\mathrm{NM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{GP}}$ から p の値を求めて 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{NM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ から q の値を求めて 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{NM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{GR}}$ から r の値を求めて 5 点
- 残りの計算と答えに 6 点

第 3 問　(30 点満点)

- $2023^n = 17^n \cdot (7^n \cdot 17^n)$ を導いて 2 点
- 自然数 x と 2023^n の最大公約数が 17^n であるための条件を述べて 5 点
- N が $7^n \cdot 17^n$ 以下の自然数 x' で $7^n \cdot 17^n$ と互いに素であるものの個数であることを示して 7 点
- 上記の自然数 x' と $7^n \cdot 17^n$ が互いに素であるための条件を述べて 5 点
- $7^n \cdot 17^n$ 以下の自然数で，7 または 17 で割り切れるものの個数を求めて 7 点
- N を求める計算と答えに 4 点

第 4 問　(30 点満点)

- L の方程式を絶対値を外した形で示して 3 点(各 1 点)
- C と L (2 つの半直線および 1 つの線分)が接する条件を，2 次方程式の重解条件に置き換え，それぞれの判別式と重解の範囲の式を立てて 12 点(各 4 点)
- $b=k$ を導いて 2 点
- a, c の値を求めて 2 点
- 上記で求めた a, b, c が重解の範囲を満たすことを示して 2 点
- C と L の図示に 3 点
- 面積を求める計算と答えに 6 点

第 5 問　(30 点満点)

- この操作が 1 回目で終了する確率を求めて 3 点
- $n\ (\geqq 2)$ 回目で終了する 2 つの互いに排反な場合を述べて 6 点

  ($n-1$ 回目までに白玉のみの場合 2 点，白玉 $n-2$ 回，青玉 1 回の場合 4 点)
- p_n を求める立式が正しくできて 10 点
- p_n を求め，$n=1$ のときも成り立つことを述べて 4 点
- $p_{n+1}-p_n$ を大小関係が比較できるまで変形できて 4 点
- 答えに 3 点

【理系】（200 点満点）

第1問　（30 点満点）

問 1　（配点 15 点）

- $\dfrac{dx}{d\theta}, \dfrac{dy}{d\theta}, \dfrac{dy}{dx}$ を求めて 4 点$\left(\dfrac{dx}{d\theta}, \dfrac{dy}{d\theta}\right.$ に各 1 点, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right.$ に 2 点$\left.\right)$
- P における接線の方程式を求めて 3 点
- A, B の座標を求めて 2 点(各 1 点)
- $S(\theta), \dfrac{S(\theta)}{\theta^{n-2}}$ をそれぞれ求めて 4 点(各 2 点)
- 残りの証明に 2 点

問 2　（配点 15 点）

- $L(\pi), L(\pi)i, E(L(\pi)i)$ を順に求めて 7 点($L(\pi), L(\pi)i$ に各2点, $E(L(\pi)i)$ に 3 点）
- $L(i), L(i)i, E(L(i)i)$ を順に求めて 8 点($L(i)$ に 3 点, $L(i)i$ に 2 点, $E(L(i)i)$ に 3 点）

第 2 問　（30 点満点）

- $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表して 3 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\,\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\,\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\,\vec{c}$ のような設定の下で，$\overrightarrow{\mathrm{GP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表して 6 点(各 2 点)
- $\overrightarrow{\mathrm{NM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{GP}}$ から p の値を求めて 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{NM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ から q の値を求めて 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{NM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{GR}}$ から r の値を求めて 5 点
- 残りの計算と答えに 6 点

第 3 問　（35 点満点）

- $2023^n = 17^n \cdot (7^n \cdot 17^n)$ を導いて 2 点
- 自然数 x と 2023^n の最大公約数が 17^n であるための条件を述べて 5 点
- N が $7^n \cdot 17^n$ 以下の自然数 x' で $7^n \cdot 17^n$ と互いに素であるものの個数であることを示して 7 点
- 上記の自然数 x' と $7^n \cdot 17^n$ が互いに素であるための条件を述べて 5 点
- $7^n \cdot 17^n$ 以下の自然数で，7 または 17 で割り切れるものの個数を求めて 7 点
- N を求める計算と答えに 4 点
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log N}{n}$ を求める計算と答えに 5 点

第 4 問　(35 点満点)

(1)　(配点 15 点)

- $u'\left(=\dfrac{du}{dt}\right)$ を求め，u の増減を調べて 7 点
- $u''>0$ から C が下に凸であることを示して 4 点
- C の概形に 4 点

(2)　(配点 20 点)

- $e^x=\dfrac{1}{2}$ が条件の等式を満たすことを述べて 6 点
- $e^x=\dfrac{1}{2}$ から x の 1 つの値を求めて 2 点
- 式変形により $e^x=\dfrac{1}{4}$ が条件の等式を満たすことを述べて 8 点
- $e^x=\dfrac{1}{4}$ から x の 1 つの値を求めて 2 点
- 条件を満たす x が上記の 2 つに限ることを述べて 2 点

第 5 問　(35 点満点)

- 球が入っている箱の個数と確率の推移を示して 6 点
- 球が入っている箱の個数は n の偶奇によることを述べて 5 点
- n が奇数のとき，$p_n=q_n=0$ であることを述べて 2 点
- n が偶数のとき，$n=2m$ とし，p_n, q_n をそれぞれ P_m, Q_m のようにおいて，$\{P_m\}$, $\{Q_m\}$ に関する漸化式を立てて 6 点(各 3 点)
- 上記の P_m, Q_m に対し P_1, Q_1 の値を述べて 2 点
- $\{P_m\}$, $\{Q_m\}$ の一般項を求めて 12 点
- 答えに 2 点

第 6 問　(35 点満点)

- $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ に正の数と負の数があることを述べて 2 点
- $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ を 0 以上の項と負の項に分けて，それらの和としての表現(解答解説の①，②)に直して 10 点(各 5 点)
- $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の 0 以上の項の和，負の項の和が $\dfrac{1}{2}$ となることを示して 5 点
- $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の 0 以上の項のそれぞれの係数を含めた和の評価(解答解説の④)に 6 点
- $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の負の項のそれぞれの係数を含めた和の評価(解答解説の⑤)に 6 点
- 残りの証明に 6 点