2022 年度第 2 回京大本番レベル模試

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 2 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(150 点満点)

第 1 問　(30 点満点)

- カードの入れ方の総数を求めて 2 点
- 箱に名前を付け，空箱とならない 3 個の箱に空箱が生じない場合の数を求める方針に 2 点
- 空箱とならない 3 個の箱に空箱が生じる 2 つの場合を述べて 6 点
- 空箱とならない 3 個の箱に空箱が 2 個生じる場合の数を求めて 3 点
- 空箱とならない 3 個の箱に空箱が 1 個生じる場合の数を求めて 6 点
- 空箱とならない 3 個の箱に空箱が生じない場合の数を求めて 3 点
- 6 箱のうち，ちょうど 3 つが空箱となる場合の数，および確率に 8 点(各 4 点)

第 2 問　(30 点満点)

- C と L が相異なる 3 点を共有するためには，$0 < m < a^2$ が必要であることを述べて 2 点
- C と L で囲まれた 2 つの図形の面積を S_1, S_2 のように設定して 2 点
- x 軸，C の $0 \leqq x \leqq a$ の部分，L で囲まれた図形の面積を T，$C' : y = x(x^2 - a^2)$ $(x \geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を U のように設定したもとで $2U = S_2 + T + U$ を述べて 4 点
- 上記の C' と L の共有点で O と異なるものの x 座標を p とおいたとき，$S_2 + T + U$ を p で表して 11 点
- 上記の U を求めて 5 点
- m を a で表し，$0 < m < a^2$ を満たしていることを確認して 6 点

第 3 問　(30 点満点)

- L の傾きが $-\dfrac{1}{2p}$ であることを述べて 5 点
- 条件を満たす 2 つの円の中心を A, B のようにおいたとき，A, B が L 上の点であることを述べ，さらにそれぞれの y 座標が円の半径と等しくなることを述べて 4 点
- $r = \dfrac{3}{4}p^2$ を導いて 11 点
- 途中の計算と答えに 10 点

第 4 問　(30 点満点)

- A, B, C から対辺に垂線 AH, BI, CJ を下ろし，OP $= x$AH, OQ $= y$BI, OR $= z$CJ のようにおいたとき，$S_1 : S_2 : S_3 = x : y : z$ となることを述べて 6 点
- $\triangle$ABC の外接円の半径を r，面積を S とおいたとき，T_1, T_2, T_3 を a, b, c, x, y, z, r, S で表して 6 点
- $T_1 : T_2 : T_3$ を a, b, c, x, y, z を用いて表して 6 点
- $x : y : z$ を a, b, c の比で表して 6 点
- 答えに 6 点

第 5 問　(30 点満点)

- $(*)$ を満たすとき，a, b が整数であることを示して 4 点
- $f(x)$ を平方完成した式に 4 点
- a が偶数のとき，$f\left(-\dfrac{a}{2}\right), f\left(-\dfrac{a}{2}+1\right)$ が平方数となることが必要であることを述べて 4 点
- 上記のもと，ある整数 A が存在して $f(x) = (x+A)^2$ となることを示して 8 点
- a が奇数のとき，$f\left(-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2}\right), f\left(-\dfrac{a}{2}+\dfrac{3}{2}\right)$ が平方数となることが必要であることを述べて 6 点
- a が奇数となることはないことを示し，残りの証明に 4 点

【理系】(200 点満点)

第1問　(35 点満点)

- 範囲 I を求めて 7 点
- $f(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$ を求めて 10 点
- $f(x)$ が範囲 I において単調に増加することを示して 5 点
- $\displaystyle\lim_{x\to\beta-0} f(x)=\infty$ を述べて 5 点
- $\displaystyle\lim_{x\to-\beta+0} f(x)=-\frac{1}{2}$ を述べて 3 点
- グラフに 5 点

第 2 問　(35 点満点)

- 図(角を含めたもの)に 3 点
- 円の中心を O とし，$\angle \mathrm{AOP}=2\theta$ とおいたとき，PA, PB, PC, PD, PE を θ で表して 10 点(各 2 点)
- $\dfrac{1}{2}\left\{(\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PD})-(\mathrm{PC}+\mathrm{PE})\right\}=\left(1-2\cos\dfrac{\pi}{5}+2\cos\dfrac{2\pi}{5}\right)\sin\theta$ を求めて 12 点
- 残りの証明に 10 点

第 3 問　(30 点満点)

- A, B, C から対辺に垂線 AH, BI, CJ を下ろし， $\mathrm{OP}=x\mathrm{AH}$, $\mathrm{OQ}=y\mathrm{BI}$, $\mathrm{OR}=z\mathrm{CJ}$ のようにおいたとき，$S_1:S_2:S_3=x:y:z$ となることを述べて 6 点
- $\triangle \mathrm{ABC}$ の外接円の半径を r，面積を S とおいたとき，T_1, T_2, T_3 を a, b, c, x, y, z, r, S で表して 6 点
- $T_1:T_2:T_3$ を a, b, c, x, y, z を用いて表して 6 点
- $x:y:z$ を a, b, c の比で表して 6 点
- 答えに 6 点

第 4 問　(35 点満点)

- $0<\theta_k<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin^2\theta_k<{\theta_k}^2<\tan^2\theta_k$ を示して 7 点
- $\sin^2\theta_k$ を n, k を用いて表して 6 点
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k+1}<\sum_{k=1}^{n}{\theta_k}^2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ を示して 2 点
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ を求めて 12 点

- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k+1}$ を求めて 6 点
- 答えに 2 点

第 5 問　(35 点満点)

- 対称性から n 秒後に P が A，Q が B，R が C にある確率がどれも a_n であることを述べて 3 点
- n 秒後に P が B, C，Q が C, A，R が A, B にある確率がどれも $\frac{1-a_n}{2}$ であることを述べて 3 点
- n 秒後に P, Q, R が各頂点に 1 つずつある確率をそれぞれ求めて 6 点(各 1 点)
- p_n を a_n で表して 4 点
- $\{a_n\}$ の漸化式を立て，一般項を求めて 8 点
- $p_n=\frac{2}{9}$ となる a_n を求めて 4 点
- $k=\frac{1}{3}$ を求め，すべての n で $p_n=\frac{2}{9}$ となることを述べて 7 点

第 6 問　(30 点満点)

- $a^{2^l}=(a^{2^k})^{2^{l-k}}$ と変形して 8 点
- 上記の式変形のもと $\bmod 2A_k$ で $a^{2^l}=(2A_k-1)^{2^{l-k}}\equiv(-1)^{2^{l-k}}=1$ を述べて 12 点 (各 4 点)
- ある整数 B を用いて $a^{2^l}=2A_kB+1$ と書けることを述べて 4 点
- 上記の B を用いて $A_l=A_kB+1$ となることを述べて 4 点
- 証明の結論に 2 点