2022 年度第 3 回京大本番レベル模試

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第 1 問　(30 点満点)

- $\triangle$ABC の 3 辺の長さを設定し，$\triangle$ABI に正弦定理を用いて 6 点
- x を α, β, γ を用いた式で表して 6 点
- $x = 4\sin\beta\sin\gamma$ を導いて 6 点
- $y = 4\sin\gamma\sin\alpha$, $z = 4\sin\alpha\sin\beta$ を求めて 6 点
- 残りの証明に 6 点

第 2 問　(30 点満点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分を t で表して 6 点
- Q の軌跡 L の方程式を求めて 6 点
- K, L, OA, BC の上下を表す図に 6 点
- S を求める定積分の式に 6 点
- 答えに 6 点

第 3 問　(30 点満点)

- 3 色 A, B, C で塗るとき，1 両目が A のときのみ考えればよいことの説明に 6 点
- 2 両目の色が A のとき、3 両目が B または C のときの場合の数に 5 点
- 2 両目の色が B または C のときの場合の数に 5 点
- $\{a_n\}$ の漸化式に 5 点
- 答えに 9 点($a_1 \sim a_9$ の正しい値に各 1 点)

第 4 問　(30 点満点)

- L の最大値とこのときの P の位置を理由とともに示して 10 点
- P から平面 ABC に下ろした垂線を PP$'$ とするとき，PA^2, PB^2, PC^2 を PP$'$ とそれぞれ $\mathrm{P'A}^2$, $\mathrm{P'B}^2$, $\mathrm{P'C}^2$ を用いて表して 6 点
- $L' = \mathrm{P'A}^2 + \mathrm{P'B}^2 - \mathrm{P'C}^2$ で定めたとき $L \geqq L'$ を述べて 4 点
- L' を 2 つの文字で表して 6 点
- 上記から L'，すなわち L の最小値を求め，さらに P の位置を述べて 4 点

第 5 問　(30 点満点)

- 条件$(*)$を$n^{j+1}-n$が 10 で割り切れることと言い換えて 3 点
- $n^{j+1}-n$が偶数であることから，$n(n^j-1)$が 5 で割り切れることを記述して 3 点
- $n\equiv 0 \pmod 5$のとき，jによらずに$n(n^j-1)\equiv 0 \pmod 5$となることを述べて 3 点
- $n \not\equiv 0 \pmod 5$のとき，nが 5 で割り切れないから$n^i\equiv 1 \pmod 5$と同値であることを示して 3 点
- $n\equiv 1 \pmod 5$のとき，jによらずに$n^j\equiv 1 \pmod 5$となることを述べて 3 点
- $n\equiv -1 \pmod 5$のとき，jが偶数であることが必要であることの説明に 6 点
- $n\equiv \pm 2 \pmod 5$のとき，$j=2k$においてkが偶数のときのみ$n^i\equiv 1 \pmod 5$となることを示して 6 点
- 答えに 3 点

【理系】（200 点満点）

第 1 問　(30 点満点)

- $\triangle$ABC の 3 辺の長さを設定し，$\triangle$ABI に正弦定理を用いて 6 点
- x を α, β, γ を用いた式で表して 6 点
- $x=4\sin\beta\sin\gamma$ を導いて 6 点
- $y=4\sin\gamma\sin\alpha$, $z=4\sin\alpha\sin\beta$ を求めて 6 点
- 残りの証明に 6 点

第 2 問　(35 点満点)

- p_1, p_2 の値に 4 点(各 2 点)
- 連続して表が出ない 2 つの排反な事象を説明して 8 点（各 4 点）
- $n \geqq 3$ の下で $\{p_n\}$ の漸化式を立てて 6 点
- 題意の不等式を数学的帰納法で証明する方針に 4 点
- $n=1, 2$ のとき題意の不等式が成り立つことを示して 2 点
- $n=k, k+1$ のとき題意の不等式が成り立つことを仮定して 4 点
- 残りの証明に 7 点

第 3 問　(35 点満点)

- $(\tan x)'$ に 2 点
- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分を t で表して 6 点(各 3 点)
- Q の軌跡 L の方程式を求めて 4 点
- $f(x)$ が $1<x<1+\dfrac{\pi}{4}$ において増加関数であることを示して 2 点
- $1<x<1+\dfrac{\pi}{4}$ において $y=f(x)$ が下に凸であることを示して 6 点
- $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ において $y=\tan x$ が下に凸であることを述べて 2 点
- K, L, OA, BC の上下を表す図に 3 点
- S を求める定積分の式に 5 点
- 答えに 5 点

第 4 問　(30 点満点)

- L の最大値とこのときの P の位置を理由とともに示して 10 点
- P から平面 ABC に下ろした垂線を PP$'$ とするとき，PA^2, PB^2, PC^2 を PP$'$ とそれぞれ $\mathrm{P'A}^2$, $\mathrm{P'B}^2$, $\mathrm{P'C}^2$ を用いて表して 6 点
- $L'=\mathrm{P'A}^2+\mathrm{P'B}^2-\mathrm{P'C}^2$ で定めたとき $L \geqq L'$ を述べて 4 点

- L' を 2 つの文字で表して 6 点
- 上記から L'，すなわち L の最小値を求め，さらに P の位置を述べて 4 点

第 5 問　(35 点満点)

- $z^7 - 1$ を α を含む形に因数分解して 10 点
- 上記の式に $z = \omega$ を代入した式に 7 点
- L を ω で表して 6 点
- $\omega^7 - 1 = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x - 1$ の式変形に 4 点
- 残りの計算と証明に 8 点

第 6 問　(35 点満点)

- 条件$(*)$を $n^{j+2} - n^2$ が 9 で割り切れることと言い換えて 6 点
- $n \equiv 0, \pm 3 \pmod 9$ のとき，j によらず $n^{j+2} - n^2$ が 9 で割り切れることを示して 6 点(各 2 点)
- $n \equiv 1 \pmod 9$ のとき，j の偶奇によらず $n^j - 1 \equiv 0 \pmod 9$ が成り立つことを述べて 2 点
- $n \equiv -1 \pmod 9$ のとき，j の偶奇での mod 9 での余りを示して 3 点
- $n \equiv \pm 2 \pmod 9$ のとき，$n^j - 1 \equiv 0 \pmod 9$ となるのが $j = 6l$ (l は正の整数) とかけるときであることを述べて 6 点(各 3 点)
- $j = 6l$ (l は正の整数) と書けるとき，$n \equiv \pm 4 \pmod 9$ のとき $n^j - 1 \equiv 0 \pmod 9$ になることを示して 6 点(各 3 点)
- 答えに 6 点