2023 年度第 1 回京大本番レベル模試

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(150 点満点)

第 1 問　(30 点満点)

- 条件を満たす x, y, z の組が存在するという仮定の下，$2x^2 \equiv y^2 \pmod 3$ を述べて 10 点
- 3 を法としたとき任意の整数 n に対して，$n^2 \equiv 0$ または $n^2 \equiv 1$ であることを述べて 4 点
- $2x^2 \equiv y^2 \pmod 3$ が成り立つとき，x, y がともに 3 の倍数でなければならないことを述べて 6 点
- x, y, z の最大公約数が 1 であることから，z が 3 で割り切れないことを述べて 4 点
- 題意の等式を $2024x^2 - y^2 = 3z^2$ としたとき，左辺が 3^2 で割り切れるが，右辺が 3^2 で割り切れないことから矛盾を述べて 6 点

第 2 問　(30 点満点)

- Q の x 座標を q のようにおいたとき，q を p で表して 6 点
- l, m が x 軸正方向となす角を α, β としたとき，$\tan\alpha, \tan\beta$ をそれぞれ p で表して 4 点
  $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \beta \neq \frac{\pi}{2}\text{の抜けは}-1\text{点}\right)$
- l と m のなす角が $\frac{\pi}{4}$ であるための条件として $\tan(\alpha-\beta)=\pm 1$ を述べて 4 点
- p の等式 $\frac{-9p^2}{36p^4-15p^2+2}=\pm 1$ を求めて 6 点
- 残りの計算と答えに 10 点

第 3 問　(30 点満点)

- $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表して 8 点(各 2 点)
- J を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の大きさと内積で表して 6 点
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の内積を四面体 ABCD の辺の長さで表して 6 点(各 2 点)
- 残りの計算と答えに 10 点

第 4 問　(30 点満点)

- k 回目の試行後に左端の数字が 1 である確率を q_k のように設定して 7 点
- 上記の設定のもと $q_1 = \frac{1}{n}$ を述べて 3 点
- 数列 $\{q_k\}$ に関する漸化式を立てて 7 点
- 数列 $\{q_k\}$ の一般項を求めて 8 点
- 答えに 5 点

第 5 問　(30 点満点)

- S_1 , S_2 の値から $S_2 > S_1$ を示して 4 点
- $S_n - S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^n} - \frac{1}{k^{n+1}}\right) - \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ (解答解説の(*)の式) まで変形して 8 点
- 上記から $S_n - S_{n+1} \geqq \left(\frac{1}{n^n} - \frac{1}{n^{n+1}}\right) - \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ まで示して 8 点
- $S_n > S_{n+1}$ の残りの証明に 6 点
- 答えに 4 点