2024年度最終　京大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】(200 点満点)

第1問　(35 点満点)

問１　(配点 15 点)

- $f(f(x))-x$ が $f(x)-x$ で割り切れることを示して 5 点
- $f(f(x))-x$，$f(x)-x$ を x の具体的な式で表して 3 点
- $f(f(x))-x=(x^2-x+3)(x^2+x+4)$ を求めて 3 点(この式があれば, 冒頭の 5 点分は説明がなくても加点)
- 上記から，$x^2-x+3=0$，$x^2+x+4=0$ の解をそれぞれ求めて 4 点(各 2 点)

問２　(配点 20 点)

- $b=f(a)$, $c=g(a)$ とおいたとき，$\sin b=\cos c$ となることを述べて 5 点
- $\sin b=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-c\right)$ を述べて 5 点
- b, $\dfrac{\pi}{2}-c$ のとり得る値の範囲を求めて 5 点
- 答えに 5 点

第２問　(30 点満点)

- $\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を a, b, x, y で表して 10 点
- $\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を a, c, x, z で表して 10 点
- 上記から，$x^2-y^2=a^2-b^2$ かつ $x^2-z^2=a^2-c^2$ と $\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ が同値であることを述べて 4 点
- $\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ と $\overrightarrow{\mathrm{DP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{DP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の同値性を示して 4 点
- 残りの証明に 2 点

第３問　(35 点満点)

- 点Pで C と接し，かつ y 軸とも接する円の中心を $\mathrm{A}(a,\ b)$ のように設定して 2 点
- $\mathrm{AP}^2=a^2$ から a, b, p の関係式(解答解説①の式)を求めて 5 点
- 点Pにおける C の接線の傾きが $\dfrac{1}{p}$ であることを述べて 3 点

- $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp (p,1)$ から $a,\ b,\ p$ の関係式(解答解説②の式)を求めて 4 点
- 上記の 2 つの $a,\ b,\ p$ の関係式から $\log p$ を消去し，a の 2 次方程式の形(解答解説の③の式)に整理して 4 点
- 上記の a の 2 次方程式の 2 解を a_1 , a_2 としたとき, 条件を満たす 2 円の面積の和が $\pi({a_1}^2+{a_2}^2)$ であることを述べて 4 点
- ${a_1}^2+{a_2}^2$ を p の式で表し，さらに ${a_1}^2+{a_2}^2 \geqq 4\sqrt{2}+6$ を示して 8 点
- ${a_1}^2+{a_2}^2 \geqq 4\sqrt{2}+6$ の等号を満たす p を求めて 3 点
- 2 円の面積の和の最小値を求めて 2 点

第 4 問　(30 点満点)

- 与えられた方程式が有理数の解をもつと仮定し，その有理数の解を $\dfrac{p}{q}$ ($p,\ q$ は互いに素な整数で，$q \neq 0$)として代入した式に 3 点
- 上記を $a_n p^n = -(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1})q$ に変形して 7 点
- $p,\ q$ が互いに素であることを述べた上で，a_n が q で割り切れることを示して 5 点
- $q,\ p$ がそれぞれ奇数であることを示して 6 点(各 3 点)
- 解答解説①の式の左辺が奇数であることを示して 6 点
- 残りの証明に 3 点

第 5 問　(30 点満点)

- 操作が終了するまでの操作の回数が 4 回以下であることを述べて 3 点
- 操作が 1 回で終わる確率を求めて 2 点
- 操作が 2 回で終わる確率を求めて 5 点
- 操作が 3 回で終わる確率を求めて 8 点
- 操作が 4 回で終わる確率を求めて 7 点
- 答えに 5 点

第 6 問　(40 点満点)

(1)　(配点 26 点)

- $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\,dx$ とおいたとき，$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |t-a| \sin t\,dt$ を示して 4 点
- $|t-a|$ の絶対値記号を外す場合分けに 2 点
- $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$a = 1 + a - 2\sin a$ を導いて 10 点
- $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，上記を満たす a を求めて 2 点

- $a \geqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$a = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |t-a| \sin t dt$ を満たす a が存在しないことを示して 6 点
- 答えに 2 点

(2) (配点 14 点)

- $V = \dfrac{\pi}{2}\left\{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2 \cos 2x dx\right\}$ を導いて 4 点
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2 dx$ を計算して 2 点
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2 \cos 2x dx$ を計算して 6 点
- 答えに 2 点