東京科学大本番レベル模試

解答・解説・採点基準

全５問　１８０分　３００点満点

Ⅰ　（６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

与えられた漸化式および $a_1>0$ より，帰納的にすべての正の整数 n について $a_n>0$ となるから

$$a_{n+1}<a_n$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a_n+\frac{2}{3}+\frac{3}{a_n{}^2}<a_n$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}a_n-\frac{2}{3}-\frac{3}{a_n{}^2}>0$$
$$\Leftrightarrow a_n{}^3-2a_n{}^2-9>0\ (\because a_n>0)$$
$$\Leftrightarrow (a_n-3)(a_n{}^2+a_n+3)>0$$
$$\Leftrightarrow a_n>3\ \text{(A)}\ (\because a_n{}^2+a_n+3>0)$$

である。ここで，$a_1=1$ であるから，$n=1$ のとき $a_n>3$ は成り立たない。以下，数学的帰納法を用いて，2 以上のすべての整数 n について，$a_n>3$ が成り立つことを示す。(B)

[1]　$n=2$ のとき

$a_2=\frac{13}{3}>3$ より，$a_n>3$ が成り立つ。(C)

[2]　$n=k$ (k は 2 以上の整数)のとき

$a_k>3$ が成り立つと仮定する。$n=k+1$ のとき

(1)　35 点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A) $a_{n+1}<a_n$ が $a_n>3$ と同値であることを示して‥10 点

(B) 2 以上の n について数学的帰納法を用いる方針を述べて‥5 点

(C) $n=2$ のとき $a_n>3$ が成り立つことを示して‥5 点

・$a_{n+1}<a_n$ を示しても可

$$a_{k+1}=\frac{2}{3}a_k+\frac{2}{3}+\frac{3}{a_k{}^2}$$
$$=3+\frac{1}{3a_k{}^2}\left(2a_k{}^3-7a_k{}^2+9\right)$$
$$=3+\frac{1}{3a_k{}^2}(a_k-3)\left(2a_k{}^2-a_k-3\right)$$

となる。ここで

$$2a_k{}^2-a_k-3=2\left(a_k-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$$

であるから，$a_k>3$ のとき

$$2a_k{}^2-a_k-3>2\cdot 3^2-3-3=12>0$$

である。また

$$\frac{1}{3a_k{}^2}>0,\ a_k-3>0$$

である。したがって

$$a_{k+1}=3+\frac{1}{3a_k{}^2}(a_k-3)\left(2a_k{}^2-a_k-3\right)$$
$$>3$$

となり，$n=k+1$ のときも $a_n>3$ が成り立つ。(D)

以上, [1], [2]より，2 以上のすべての整数 n について $a_n>3$ が成り立つから，$a_{n+1}<a_n$ となる。したがって，求める必要十分条件は

$$n\geqq 2$$

である。

(答) $n\geqq 2$ (E)

(D) $n=k$ のとき $a_n>3$ が成り立つと仮定すると $n=k+1$ のときも成り立つことを示して‥10 点

(E)答‥5 点

(2)

(1)の過程より

$$a_{n+1}-3=\frac{2a_n{}^2-a_n-3}{3a_n{}^2}(a_n-3)\ \text{(A)}$$

である。ここで，$n\geqq 2$ のとき $a_n>3$ であるから, (1)の過程より

$$2a_n{}^2-a_n-3>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2a_n{}^2-a_n-3}{3a_n{}^2}>0$$

が成り立つ。また，

$$\frac{2a_n{}^2-a_n-3}{3a_n{}^2}<\frac{2a_n{}^2}{3a_n{}^2}=\frac{2}{3}$$

である。したがって

(2)　25 点 (A)(B)(C)(D)

(A)漸化式を左の形に変形して‥10 点

$$0<\frac{2a_n{}^2-a_n-3}{3a_n{}^2}<\frac{2}{3}$$

であるから

$$0\leqq|a_{n+1}-3|<\frac{2}{3}|a_n-3|\ \text{(B)}$$

となり，これを繰り返し用いると

$$0\leqq|a_n-3|<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}|a_2-3|\ \text{(C)}$$

となる。ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}|a_2-3|=0$$

となるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3$$

である。

(答) 3 (D)

(B) $n\geqq 2$ のとき $|a_{n+1}-3|<\frac{2}{3}|a_n-3|$ を示して‥5 点

(C) $|a_n-3|<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}|a_2-3|$ を示して‥5 点

(D)答‥5 点

(2)[別解]

$f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}+\frac{3}{x^2}\ (x>0)$ とおくと，関数 $f(x)$ は $x>0$ で微分可能で，$f'(x)=\frac{2}{3}-\frac{6}{x^3}$ である。また数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+1}=f(a_n)$$

を満たす。以下，$n\geqq 2$ のときについて考える。このとき，$a_n>3$ であるから，閉区間 $[3,\ a_n]$ において，平均値の定理より

$$\frac{f(a_n)-f(3)}{a_n-3}=f'(c),\ 3<c<a_n$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(a_n)-3}{a_n-3}=f'(c),\ 3<c<a_n$$

を満たす実数 c が存在する。(E) ここで，$f'(c)=\frac{2}{3}-\frac{6}{c^3}$ であり，$c>3$ より

$$\frac{2}{3}-\frac{6}{3^3}<f'(c)<\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{9}<f'(c)<\frac{2}{3}$$

(2)[別解] 25 点 (E)(B)(C)(D)

(E)閉区間 $[3,\ a_n]$ について平均値の定理を正しく用いて‥10 点

となる。したがって

$$|a_{n+1}-3| = |f(a_n)-3|$$
$$= |f'(c)||a_n-3|$$
$$< \frac{2}{3}|a_n-3| \text{ (B)}$$

となり，これを繰り返し用いると

$$0 \leqq |a_n-3| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}|a_2-3| \text{ (C)}$$

となる。ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}|a_2-3| = 0$$

となるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-3| = 0$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である。

(答) 3 (D)

(B) $n \geqq 2$ のとき $|a_{n+1}-3| < \frac{2}{3}|a_n-3|$ を示して‥5 点

(C) $|a_n-3| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}|a_2-3|$ を示して‥5 点

(D)答‥5 点

2 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$\mathrm{Re}(\alpha) \geqq 0,\ \mathrm{Im}(\alpha) \geqq 0,\ |\alpha| = R$ より，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすような実数 θ を用いて $\alpha = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ (A)とおける。このとき，ド・モアブルの定理より

$$\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2}$$
$$= R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \frac{4}{R^2}\{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\}$$
$$= \left(R^2 + \frac{4}{R^2}\right)\cos 2\theta + i\left(R^2 - \frac{4}{R^2}\right)\sin 2\theta \text{ (B)}$$

となるから，実数 x, y を用いて $\alpha^2 + \dfrac{4}{\alpha^2} = x + yi$ とおくと，

$$\begin{cases} x = \left(R^2 + \dfrac{4}{R^2}\right)\cos 2\theta \\ y = \left(R^2 - \dfrac{4}{R^2}\right)\sin 2\theta \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos 2\theta = \dfrac{x}{R^2 + \dfrac{4}{R^2}} \\ \sin 2\theta = \dfrac{y}{R^2 - \dfrac{4}{R^2}} \end{cases} \left(\because R > \sqrt{2} \text{ より } R^2 - \frac{4}{R^2} \neq 0\right)$$

である。よって，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすような実数 θ が存在するための条件は，$0 \leqq 2\theta \leqq \pi$ の範囲で $\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$ が成り立つことから

$$\frac{x^2}{\left(R^2 + \dfrac{4}{R^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R^2 - \dfrac{4}{R^2}\right)^2} = 1 \text{ (C)かつ } \frac{y}{R^2 - \dfrac{4}{R^2}} \geqq 0$$

(I)　30 点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A) α を極形式で表して‥5 点

・$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の有無は不問

(B) $\alpha^2 + \dfrac{4}{\alpha^2}$ を計算して‥5 点

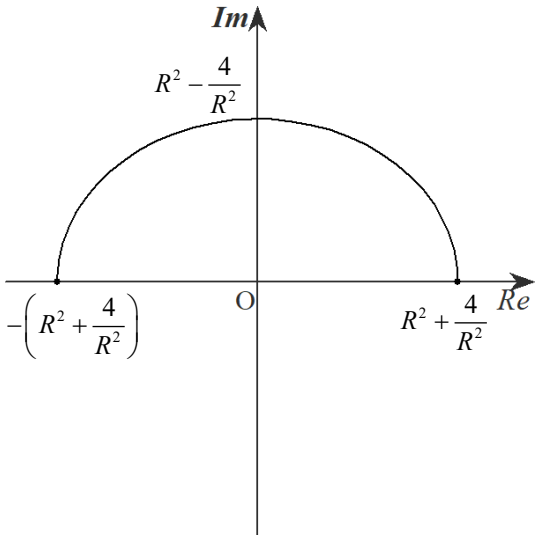
・網掛け部分の形まで変形できて加点

(C) $\alpha^2 + \dfrac{4}{\alpha^2}$ が楕円上を動くことに言及して‥5 点

・$R^2 - \dfrac{4}{R^2} \neq 0$ の有無は不問

である。 $R>\sqrt{2}$ のとき $R^2-\dfrac{4}{R^2}>0$ より，$\dfrac{y}{R^2-\dfrac{4}{R^2}}\geqq 0 \Leftrightarrow y\geqq 0$ (D)

であるから，図形 K は下図の端点を含む実線部のようになる。



(答) 前図(E)

(D) $y\geqq 0$ の範囲になることを導いていて‥10 点

(E) 答‥5 点

・端点への言及の有無は不問

(1)[別解]

$u^2+v^2=R^2$ を満たす 0 以上の実数 u, v を用いて $\alpha=u+iv$ (A1)とおける。このとき，

$$\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}$$
$$=u^2-v^2+2iuv+\frac{4}{u^2-v^2+2iuv}$$
$$=u^2-v^2+2iuv+\frac{4\left(u^2-v^2-2iuv\right)}{\left(u^2-v^2+2iuv\right)\left(u^2-v^2-2iuv\right)}$$
$$=u^2-v^2+2iuv+\frac{4\left(u^2-v^2-2iuv\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}$$
$$=u^2-v^2+2iuv+\frac{4}{R^4}\left(u^2-v^2-2iuv\right)$$
$$=\left(1+\frac{4}{R^4}\right)\left(u^2-v^2\right)+2i\left(1-\frac{4}{R^4}\right)uv \text{ (B1)}$$

となるから，実数 x, y を用いて $\alpha^2+\dfrac{4}{\alpha^2}=x+yi$ とおくと，

(1)[別解] 30 点 (A1)(B1)(C)(D)(E)

(A1) α を直交座標の形式で表す‥5 点

・u, v の範囲については不問

(B1) $\alpha^2+\dfrac{4}{\alpha^2}$ を計算して‥5 点

・網掛け部分の形まで変形できて加点

$$\begin{cases} x=\left(1+\dfrac{4}{R^4}\right)\left(u^2-v^2\right) \\ y=2\left(1-\dfrac{4}{R^4}\right)uv \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} u^2-v^2=\dfrac{x}{1+\dfrac{4}{R^4}} \\ 2uv=\dfrac{y}{1-\dfrac{4}{R^4}} \left(\because 1-\dfrac{4}{R^4}\neq 0\right) \end{cases}$$

である。

$$\left(u^2-v^2\right)^2+\left(2uv\right)^2=\left(u^2+v^2\right)^2=R^4$$

であるから，

$$\frac{x^2}{\left(R^2+\dfrac{4}{R^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(R^2-\dfrac{4}{R^2}\right)^2}=1 \text{ (C)}$$

を満たす。ここで，

$$x=\left(1+\frac{4}{R^4}\right)\left(u^2-v^2\right)$$
$$=\left(1+\frac{4}{R^4}\right)\left(2u^2-R^2\right)$$

$$y=2\left(1-\frac{4}{R^4}\right)uv$$

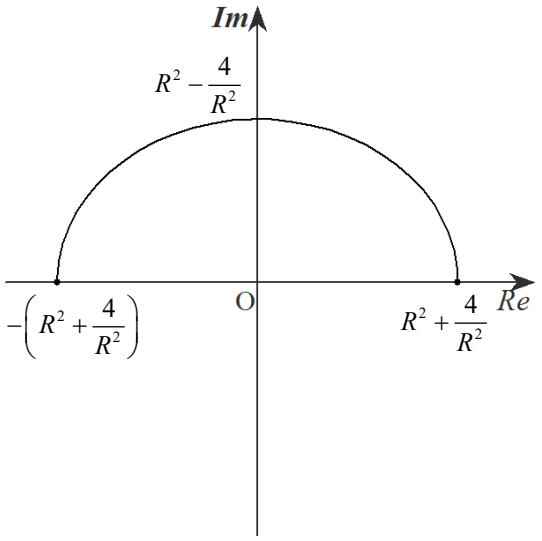
であるから，u, v が $u\geqq 0, v\geqq 0, u^2+v^2=R^2$ を動くとき，x は $-\left(R^2+\dfrac{4}{R^2}\right)\leqq x\leqq R^2+\dfrac{4}{R^2}$ の範囲をくまなく動く (D 1/2)。また，

$1-\dfrac{4}{R^4}>0$ より，y は $y\geqq 0$ を満たしながら動く (D 2/2)。

以上より，図形 K は下図の端点を含む実線部のようになる。

(C) $\alpha^2+\dfrac{4}{\alpha^2}$ **が楕円上を動くことに言及して‥5 点**

(D) $y\geqq 0$ **の範囲になることを導いていて‥10 点**



(答) 前図(E)

(E) 答‥5 点

・端点への言及の有無は不問

(2)

$$\alpha = R(\cos\theta + i\sin\theta)\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を用いると，図形 K 上のあらゆる点 w が $w=\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}$ と表される。

このとき，

$$\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}=z^2+\frac{4}{z^2} \text{(A)}$$

$$\Leftrightarrow z^4-\left(\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}\right)z^2+4=0\ (\because z^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (z^2-\alpha^2)\left(z^2-\frac{4}{\alpha^2}\right)=0$$

$$\therefore z=\pm\alpha, \pm\frac{2}{\alpha} \text{(B)}$$

となるため，ド・モアブルの定理より

z は $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ を満たすような実数 θ を用いて

$$z=\pm R(\cos\theta+i\sin\theta), \pm\frac{2}{R}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\} \text{(C)}$$

と表せる。以上より，点 z が描く図形は下図の端点を含む実線部のようになる。

(2) 30 点 (A)(B)(C)(D)

(A) z の方程式を解く方針に‥10 点

・z を極形式で表す方針をとった場合，基本的には加点しない

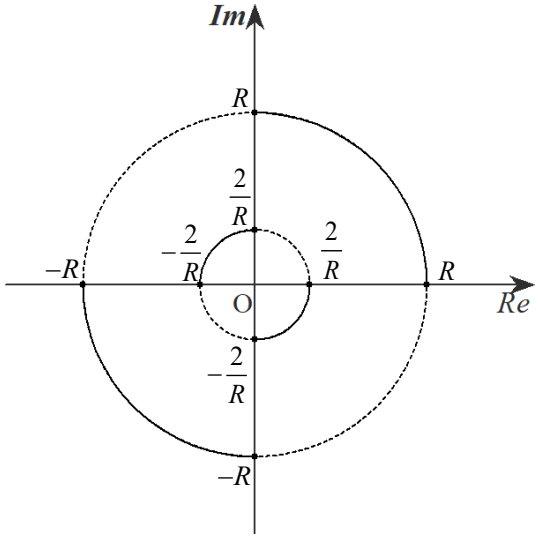
(B) z の方程式を解いて‥5 点

・解を天下り的に与えた場合，それ以外の解がないことを説明できていれば加点

(C) z が半径 R と $2/R$ の円上を動くことに言及して

‥5 点

・動く範囲への言及は不問



(答) 前図(D)

(D) 答‥10 点

・円は合っているが動く範囲が違う場合は 5 点

・端点への言及の有無は不問

3 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

Z_2 を 4 で割った余りが 0 となるとき，$(x_1, x_2)=(1, 1), (0, 0)$ であるから

$$a_2 = p^2 + (1-p)^2 = 1-2p+2p^2 \text{ (A 1/4)}$$

である。Z_2 を 4 で割った余りが 1 となるとき，$(x_1, x_2)=(1, 0)$ であるから

$$b_2 = p(1-p) = p-p^2 \text{ (A 2/4)}$$

である。Z_2 を 4 で割った余りが 2 となることはないから

$$c_2 = 0 \text{ (A 3/4)}$$

である。Z_2 を 4 で割った余りが 3 となるとき，$(x_1, x_2)=(0, 1)$ であるから

$$d_2 = (1-p)p = p-p^2 \text{ (A 4/4)}$$

である。ここで

$$Z_{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{2n} 3^{k-1} x_k + 3^{2n} x_{2n+1} + 3^{2n+1} x_{2(n+1)}$$

であり，二項定理より

$$\begin{aligned} 3^{2n} &= (4-1)^{2n} \\ &= 4^{2n} - {}_{2n}\mathrm{C}_1 \cdot 4^{2n-1} + {}_{2n}\mathrm{C}_2 \cdot 4^{2n-2} - \cdots - {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} \cdot 4 + 1 \\ &= 4\left(4^{2n-1} - {}_{2n}\mathrm{C}_1 \cdot 4^{2n-2} + {}_{2n}\mathrm{C}_2 \cdot 4^{2n-3} - \cdots - {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}\right) + 1 \end{aligned}$$

となる。$4^{2n-1} - {}_{2n}\mathrm{C}_1 \cdot 4^{2n-2} + {}_{2n}\mathrm{C}_2 \cdot 4^{2n-3} - \cdots - {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$ は整数であり，これを M とおくと

$$\begin{aligned} Z_{2(n+1)} &= \sum_{k=1}^{2n} 3^{k-1} x_k + 3^{2n} x_{2n+1} + 3^{2n+1} x_{2(n+1)} \\ &= Z_{2n} + (4M+1) x_{2n+1} + 3(4M+1) x_{2(n+1)} \\ &= 4\left(M x_{2n+1} + 3M x_{2(n+1)}\right) + Z_{2n} + x_{2n+1} + 3x_{2(n+1)} \end{aligned}$$

となるから，$Z_{2(n+1)}$ を 4 で割った余りは，$Z_{2n} + x_{2n+1} + 3x_{2(n+1)}$ を 4 で割った余りに等しい。(B)ここで，Z_{2n} を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 となる確率はそれぞれ $a_{2n}, b_{2n}, c_{2n}, d_{2n}$ である。また，$x_{2n+1} + 3x_{2(n+1)}$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 となる確率は，$Z_2 (= x_1 + 3x_2)$ を 4 で割っ

(1)　25 点 (A)(B)(C)(D)

(A) a_2, b_2, c_2, d_2 を求めて‥5 点(完答)

・漸化式を求める過程で式に現れていれば可

(B) $Z_{2(n+1)}$ と $Z_{2n} + x_{2n+1} + 3x_{2(n+1)}$ を 4 で割った余りは等しいことを述べて‥10 点

・合同式などを用いて示しても可

・$Z_{2(n+1)}$ と $Z_{2n} + x_{2n+1} - x_{2(n+1)}$ について述べても可

た余りが 0, 1, 2, 3 となる確率と同様に考えることができ，それぞれ a_2, b_2, c_2, d_2 に等しい。したがって

$$a_{2(n+1)} = a_{2n}\cdot a_2 + b_{2n}\cdot d_2 + c_{2n}\cdot c_2 + d_{2n}\cdot b_2$$
$$c_{2(n+1)} = a_{2n}\cdot c_2 + b_{2n}\cdot b_2 + c_{2n}\cdot a_2 + d_{2n}\cdot d_2$$

が成り立ち，これを整理すると

$$a_{2(n+1)} = \left(1-2p+2p^2\right)a_{2n} + \left(p-p^2\right)\left(b_{2n}+d_{2n}\right) \text{(C)}$$
$$c_{2(n+1)} = \left(1-2p+2p^2\right)c_{2n} + \left(p-p^2\right)\left(b_{2n}+d_{2n}\right) \text{(D)}$$

となる。

(答) 前述

(C) $a_{2(n+1)}$ を a_{2n}, b_{2n}, d_{2n} と p を用いて表して‥5 点

(D) $c_{2(n+1)}$ を b_{2n}, c_{2n}, d_{2n} と p を用いて表して‥5 点

(2)

(1)の結果について，辺々を足し合わせると

$$a_{2(n+1)} + c_{2(n+1)}$$
$$= \left(1-2p+2p^2\right)\left(a_{2n}+c_{2n}\right) + 2\left(p-p^2\right)\left(b_{2n}+d_{2n}\right)$$

となる。ここで，任意の正の整数 n について，Z_{2n} を 4 で割った余りは 0, 1, 2, 3 のいずれかであるから

$$a_{2n}+b_{2n}+c_{2n}+d_{2n} = 1$$
$$\Leftrightarrow b_{2n}+d_{2n} = 1-\left(a_{2n}+c_{2n}\right)$$

であり，これを用いて変形すると

$$a_{2(n+1)} + c_{2(n+1)}$$
$$= \left(1-2p+2p^2\right)\left(a_{2n}+c_{2n}\right) + \left(2p-2p^2\right)\left\{1-\left(a_{2n}+c_{2n}\right)\right\} \text{(A)}$$
$$\Leftrightarrow a_{2(n+1)} + c_{2(n+1)} = \left(1-4p+4p^2\right)\left(a_{2n}+c_{2n}\right) + 2p - 2p^2$$
$$\Leftrightarrow a_{2(n+1)} + c_{2(n+1)} - \frac{1}{2} = (1-2p)^2\left(a_{2n}+c_{2n}-\frac{1}{2}\right)$$

となる。また

$$a_2 + c_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2p + 2p^2 = \frac{1}{2}(1-2p)^2$$

であるから，数列 $\left\{a_{2n}+c_{2n}-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $\frac{1}{2}(1-2p)^2$，公比 $(1-2p)^2$ の等比数列であり

$$a_{2n}+c_{2n}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-2p)^{2n}$$

$$\therefore a_{2n}+c_{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^{2n} \text{(B)} \qquad \cdots\cdots①$$

となる。次に，(1)の結果について，辺々を引くと

$$a_{2(n+1)} - c_{2(n+1)} = \left(1-2p+2p^2\right)\left(a_{2n}-c_{2n}\right) \text{(C)}$$

(2)　25 点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A) $\{a_{2n}+c_{2n}\}$ に関する漸化式を立式して‥5 点

・b_{2n} と d_{2n} を消去できていない場合は不可

(B) $\{a_{2n}+c_{2n}\}$ の一般項を求めて‥5 点

(C) $\{a_{2n}-c_{2n}\}$ に関する漸化式を立式して‥5 点

となり

$$a_2 - c_2 = 1 - 2p + 2p^2$$

であるから，数列 $\{a_{2n} - c_{2n}\}$ は初項 $1-2p+2p^2$，公比 $1-2p+2p^2$ の等比数列であり

$$a_{2n} - c_{2n} = \left(1-2p+2p^2\right)^n \text{(D)} \qquad \cdots\cdots②$$

となる。よって，①＋②より

$$2a_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^{2n} + \left(1-2p+2p^2\right)^n$$

$$\therefore a_{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-2p)^{2n} + \frac{1}{2}\left(1-2p+2p^2\right)^n$$

である。

(答) $a_{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-2p)^{2n} + \frac{1}{2}\left(1-2p+2p^2\right)^n$ (E)

(D) $\{a_{2n} - c_{2n}\}$ の一般項を求めて‥5 点

(E)答‥5 点

(3)

(2)の結果に，$p = \frac{1}{2n}$ を代入して変形すると

$$a_{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-2} = e^{-2}$$

である。また

$$\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n = \left(1-\frac{2n-1}{2n^2}\right)^n$$

$$= \left\{\left(1-\frac{2n-1}{2n^2}\right)^{-\frac{2n^2}{2n-1}}\right\}^{-\frac{2n-1}{2n}} \text{(A)}$$

であり，$n\to\infty$ のとき，$-\frac{2n-1}{2n^2}\to 0,\ -\frac{2n-1}{2n}\to -1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n = e^{-1}$$

である。したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot e^{-2} + \frac{1}{2}\cdot e^{-1} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{e}\right)^2$$

(3)　10 点 (A)(B)

(A) $\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n$ を e の定義式を用いられる形に変形して‥5 点

である。

(答) $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{e}\right)^2$ (B)

(3)[別解]

(2)の結果に，$p=\frac{1}{2n}$ を代入して変形すると

$$a_{2n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n$$

となり

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-2}=e^{-2}$$

である。ここで，$n\to\infty$ より，$n>1$ と考えてよいから

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n^2}\\&=\frac{n-1}{2n^2(n+1)}\\&>0\ (\because n>1)\end{aligned}$$

となるため

$$1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}<1-\frac{1}{n+1}$$

である。また

$$0<1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\ (\because n>1)$$

であるから

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \text{ (C)}$$

が成り立ち，$n\to\infty$ のとき，$n+1\to\infty$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-1}\\&=e^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right\}\\&=e^{-1}\cdot 1^{-1}\\&=e^{-1}\end{aligned}$$

となる。したがって，はさみうちの原理より

(B)答‥5 点

・因数分解の有無は不問

(3)[別解]　10 点 (C)(B)

(C)はさみうちの原理を適用できる不等式を導いて‥5 点

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n=e^{-1}$$

である。以上より

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot e^{-2}+\frac{1}{2}\cdot e^{-1}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{e}\right)^2$$

である。

(答) $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{e}\right)^2$ (B)

(B)答‥5 点

・因数分解の有無は不問

4 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

点 $\mathrm{P}(X, Y)$ から楕円 C に引いた y 軸に平行でない接線の方程式は実数 m を用いて，

$$y = m(x - X) + Y \text{ (A)}$$

と表せる。これを楕円 $C: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ に代入すると，

$$\frac{x^2}{9} + \frac{\{m(x-X)+Y\}^2}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow (9m^2+16)x^2 + 18m(Y-mX)x + 9\{(Y-mX)^2 - 16\} = 0$$

となる。(B)この直線は楕円 C に接するので，x についての 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9^2m^2(Y-mX)^2 - (9m^2+16)\cdot 9\{(Y-mX)^2 - 16\} = 0$$

$$\Leftrightarrow -16(Y-mX)^2 + (9m^2+16)\cdot 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X^2-9)m^2 - 2XYm + (Y^2-16) = 0$$

となる。(C)ここで，点 P から楕円 C に引いた x 軸に平行でない 2 本の接線が直交するとき，m についての方程式は相異なる 2 つの実数解をもち，その 2 解の積は -1 となる。よって，

$$X^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow X \neq 3,\ X \neq -3$$

となる。また，$(X^2-9)m^2 - 2XYm + (Y^2-16) = 0$ に対して，解と係数の関係を用いると，

$$\frac{Y^2-16}{X^2-9} = -1 \Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 25\ (X \neq 3,\ X \neq -3)$$

となる。(D)ここで，楕円の接線の 1 つが x 軸に平行になるとき，2 本の接線が直交するため，もう一方の接線は y 軸に平行になる。x 軸に平行な接線の方程式は $y = \pm 4$，y 軸に平行な接線の方程式は

(1)　30 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(A)傾き m を用いて接線の方程式を求めて‥5 点

(B) 2 式を連立して得た x ついての 2 次方程式を立式して‥5 点

(C) $\dfrac{D}{4} = 0$ から得た m ついての 2 次方程式を立式して‥5 点

(D)解と係数の関係を用いて $X^2 + Y^2 = 25\ (X \neq 3,\ X \neq -3)$ 上の点が含まれることを示して‥5 点

$x=\pm 3$ より 4 点 $(\pm 3, \pm 4)$ (複号任意)も点 P はとりうる。(E)したがって，求める点 P の軌跡は

円 $x^2+y^2=25$ (F)

となる。

(答) 円 $x^2+y^2=25$

(E) 4 点 $(\pm 3, \pm 4)$ (複合任意)が含まれることを示して‥5 点

(F)円 $x^2+y^2=25$ ‥5 点

(2)

実数 θ を用いて，楕円 C 上の接点を $(3\cos\theta, 4\sin\theta)$ と表す。この点における楕円の接線の方程式は

$$\frac{3\cos\theta\cdot x}{9}+\frac{4\sin\theta\cdot y}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{\cos\theta}{3}x+\frac{\sin\theta}{4}y=1$$

となる。この直線の方程式は $(x, y)=(0, 0)$ を解に持たない。この点における楕円の接線の方向ベクトルは $\left(\frac{\sin\theta}{4}, -\frac{\cos\theta}{3}\right)$ となる。したがって，この点における楕円の法線の方程式は

$$\frac{\sin\theta}{4}(x-3\cos\theta)-\frac{\cos\theta}{3}(y-4\sin\theta)=0 \text{ (A)}$$

$$\Leftrightarrow 4y\cos\theta-3x\sin\theta-7\sin\theta\cos\theta=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4y)^2+(3x)^2}\cos(\theta+\alpha)-\frac{7}{2}\sin 2\theta=0$$

となる。ただし，α は

$\cos\alpha=\frac{4y}{\sqrt{(4y)^2+(3x)^2}}$, $\sin\alpha=\frac{3x}{\sqrt{(4y)^2+(3x)^2}}$ $(\because (x, y)\neq(0, 0))$ を満たす $0 \leqq \alpha < 2\pi$ の角とする。(B)ここで，実数 β を用いて，E 上の点 P は $(5\cos\beta, 5\sin\beta)$ と表せる。この楕円の法線は E 上の点 P を通るとき，

$$\sqrt{9\cos^2\beta+16\sin^2\beta}\cos(\theta+\alpha)-\frac{7}{10}\sin 2\theta=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

となる。$-\alpha \leqq \theta < 2\pi-\alpha$ の範囲で①を満たす θ の個数が条件を満たす楕円 C 上の点の個数に一致するので，①を満たす θ が $-\alpha \leqq \theta < 2\pi-\alpha$ の範囲に少なくとも 2 つあることを示す。(C)

$$9\cos^2\beta+16\sin^2\beta=9+7\sin^2\beta \geqq 9 > \left(\frac{7}{10}\right)^2$$

(2) 30 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(A)接点の座標を用いて法線の方程式を求めて‥5 点

(B)法線の方程式を θ についての三角関数の合成を用いて表して‥5 点

(C)問題文の条件を方程式の解の個数に言い換えて‥5 点

より $\sqrt{9\cos^2\beta+16\sin^2\beta}=B$ とすると，$B>\dfrac{7}{10}$ である。ここで，

$f(\theta)=B\cos(\theta+\alpha)-\dfrac{7}{10}\sin 2\theta$ とする。

$$f(-\alpha)=B-\frac{7}{10}\sin(-2\alpha)$$
$$f(\pi-\alpha)=-B-\frac{7}{10}\sin\{2(\pi-\alpha)\}=-\left[B+\frac{7}{10}\sin\{2(\pi-\alpha)\}\right]$$
$$f(2\pi-\alpha)=B-\frac{7}{10}\sin\{2(2\pi-\alpha)\}$$

となり，任意の実数 φ について $-1\leqq\sin\varphi\leqq 1$ が成り立つから

$$B-\frac{7}{10}\sin(-2\alpha)\geqq B-\frac{7}{10}>0$$

$$B+\frac{7}{10}\sin\{2(\pi-\alpha)\}\geqq B-\frac{7}{10}>0$$

$$B-\frac{7}{10}\sin\{2(2\pi-\alpha)\}\geqq B-\frac{7}{10}>0$$

となる。したがって，$f(-\alpha)>0,\ f(\pi-\alpha)<0,\ f(2\pi-\alpha)>0$ (D)となり，$f(\theta)$ は $-\alpha\leqq\theta\leqq 2\pi-\alpha$ で連続より中間値の定理から $-\alpha<\theta<\pi-\alpha,\ \pi-\alpha<\theta<2\pi-\alpha$ の範囲にそれぞれ少なくとも1つ実数解をもつ。(E)よって，軌跡 E 上の点 P について，C 上の点で，その点における楕円 C の法線が点 P を通るような点が少なくとも 2 個ある。(F)

(証明終)

(D) $f(-\alpha)>0,\ f(\pi-\alpha)<0$
$f(2\pi-\alpha)>0$ を求めて‥5 点(完答)

(E)中間値の定理を用いて‥5 点

(F)結論に‥5 点

5 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

まず，C の位置に依存しない S_1 を考える。

$$\overrightarrow{OA}\cdot(1,\ 0,\ -1)=\overrightarrow{OB}\cdot(1,\ 0,\ -1)=0$$

より，ベクトル $(1,\ 0,\ -1)$ は平面 OAB に対して垂直なベクトル(A)である。よって，A を通り平面 OAB に垂直な直線上にある点は，実数 α を用いて，

$$(1,\ 1,\ 1)+\alpha(1,\ 0,\ -1)=(1+\alpha,\ 1,\ 1-\alpha)$$

と表すことができる。この点が xy 平面上にあるとき，

$$1-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=1$$

が成り立つから，この点は $(2,\ 1,\ 0)$ となる。対称性から B を通り平面 OAB に垂直な直線上にあり，かつ xy 平面上にある点は $(2,\ -1,\ 0)$ となる。S_1 は 3 点 $(0,\ 0,\ 0),\ (2,\ \pm1,\ 0)$ のなす三角形の面積(B)となるから，

$$S_1=\frac{1}{2}\left|2\cdot(-1)-2\cdot1\right|=2 \text{ (C)}$$

となる。つづいて，S_2 について考える。実数 $u,\ v,\ w$ を用いて平面 OBC に対して垂直なベクトルを $(u,\ v,\ w)$ とおくと，$(u,\ v,\ w)$ が満たす条件は

$$\overrightarrow{OB}\cdot(u,\ v,\ w)=\overrightarrow{OC}\cdot(u,\ v,\ w)=0$$
$$\Leftrightarrow u-v+w=-su+tw=0$$
$$\Leftrightarrow u=\frac{t}{s}w,\ v=\frac{s+t}{s}w\ (\because s>0)$$

となる。よって，ベクトル $(t,\ s+t,\ s)$ は平面 OBC に対して垂直である(D)から，B を通り平面 OBC に垂直な直線上にある点は，実数 β を用いて，

$$(1,\ -1,\ 1)+\beta(t,\ s+t,\ s)=(1+\beta t,\ -1+\beta(s+t),\ 1+\beta s)$$

となり，この点が xy 平面上にあるとき

$$1+\beta s=0 \Leftrightarrow \beta=-\frac{1}{s}$$

が成り立つから，その点は

(1) 40 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)(H)

(A)平面 OAB に垂直なベクトルを 1 つ挙げて‥5 点

・直線の方程式を求めている場合，A を通り平面 OAB に垂直な直線の方程式と，B を通り平面 OAB に垂直な直線の方程式に 5 点(完答)

(B) xy 平面における V_1 の断面が 3 点 $(0,\ 0,\ 0),\ (2,\ \pm1,\ 0)$ からなる三角形であることを述べて‥5 点

・3 つの頂点の座標が求まっていれば可

(C) $S_1=2$ ‥5 点

(D)平面 OBC に垂直なベクトルを 1 つ挙げて‥5 点

・直線の方程式を求めている場合，B を通り平面 OBC に垂直な直線の方程式と，C を通り平面 OBC に垂直な直線の方程式に 5 点(完答)

$$\left(1+\beta t,\ -1+\beta(s+t),\ 1+\beta s\right)=\left(\frac{s-t}{s},\ -\frac{2s+t}{s},\ 0\right)$$

となる。同様に，C を通り平面 OBC に垂直な直線上にあり，かつ xy 平面上にある点は，γ を実数として

$$(-s,\ 0,\ t)+\gamma(t,\ s+t,\ s)=\left(-s+\gamma t,\ \gamma(s+t),\ \gamma s+t\right)$$

$$\gamma s+t=0 \Leftrightarrow \gamma=-\frac{t}{s}$$

より，

$$\left(-s+\gamma t,\ \gamma(s+t),\ \gamma s+t\right)=\left(-\frac{s^2+t^2}{s},\ -\frac{st+t^2}{s},\ 0\right)$$

となる。よって，S_2 は 3 点 $(0,\ 0,\ 0),\left(\frac{s-t}{s},\ -\frac{2s+t}{s},\ 0\right),\left(-\frac{s^2+t^2}{s},\ -\frac{st+t^2}{s},\ 0\right)$ のなす三角形の面積(E)となるから

$$S_2=\frac{1}{2}\left|\frac{s-t}{s}\cdot\left(-\frac{st+t^2}{s}\right)-\left(-\frac{2s+t}{s}\right)\cdot\left(-\frac{s^2+t^2}{s}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{s^2+t^2+st}{s}\right|$$

$$=\frac{s^2+t^2+st}{s}\ \text{(F)}\quad (\because s>0,\ t>0)$$

となる。また，三角形 OBC, OCA は xz 平面について対称であるから，V_2, V_3 も xz 平面について対称である。したがって $S_3=S_2$(G)であるから

$$S=S_1+S_2+S_3=2+2\frac{s^2+t^2+st}{s}\ \text{(H)}$$

となる。

(答) $S=2+2\dfrac{s^2+t^2+st}{s}$

(E) xy **平面における** V_2 **の断面が 3 点** $(0,\ 0,\ 0),\left(\frac{s-t}{s},\ -\frac{2s+t}{s},\ 0\right),\left(-\frac{s^2+t^2}{s},\ -\frac{st+t^2}{s},\ 0\right)$ **からなる三角形であることを述べて‥5 点**

・3 つの頂点の座標が求まっていれば可

(F) $S_2=\dfrac{s^2+t^2+st}{s}$ **‥5 点**

(G) $S_3=\dfrac{s^2+t^2+st}{s}$ **‥5 点**

(H) $S=2+2\dfrac{s^2+t^2+st}{s}$ **‥5 点**

(2)

$s=\sin\theta,\ t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta=\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$ のとき，(1)より，

$$S=2+2\frac{\sin^2\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sqrt{2}\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=2+2\left(\sin\theta+2\sin\theta\cos^2\theta+\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\right)$$

を得る。このとき，

(2) 20 点 (A)(B)(C)(D)

S'

$$= 2\left\{\cos\theta + 2\left(\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right) + \sqrt{2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right\}$$ (A)

$$= 2\left\{\cos\theta + 2\left(\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right) + \sqrt{2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right\}$$
$$= 2\left(2\cos^3\theta + \sqrt{2}\cos^2\theta + \cos\theta - 4\sin^2\cos\theta - \sqrt{2}\sin^2\theta\right)$$
$$= 2\left\{2\cos^3\theta + \sqrt{2}\cos^2\theta + \cos\theta\right.$$
$$\left. -4\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta - \sqrt{2}\left(1-\cos^2\theta\right)\right\}$$
$$= 2\left(6\cos^3\theta + 2\sqrt{2}\cos^2\theta - 3\cos\theta - \sqrt{2}\right)$$
$$= 2\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(6\cos^2\theta + 5\sqrt{2}\cos\theta + 2\right)$$

$$= 12\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$ (B)

となるから，S の増減表は下表のようになる。

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	$3\sqrt{2}+2$	↘	

(C)

上表より，S は

$\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $3\sqrt{2}+2$ (D)

をとる。

(答) $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $3\sqrt{2}+2$

(A) S' を θ を用いて表して‥5 点

・最大値を与える θ を求めるところまで S_2 のみで考えていても可

(B) S' を因数分解した形で表して‥5 点

(C)増減表‥5 点

(D) $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $3\sqrt{2}+2$ ‥5 点(完答)