２０２５年　第一回東京科学大本番レベル模試・物理

解答・採点基準

Ⅰ　（５０点）

【解答・採点基準】

〔A〕

(a)

小球 A にはたらく力のつり合いより

$$Mg\sin\theta - k(x_0 - l) = 0$$

$$\therefore x_0 = l + \frac{Mg}{k}\sin\theta$$

(答)　$x_0 = l + \frac{Mg}{k}\sin\theta$

(b)

ゴムひもが張っているときの単振動の振幅は $2l - x_0$ である。

$x = l$ より右側に到達するためには

$$l > x_0 - (2l - x_0)$$

$$\therefore l > \frac{2Mg}{k}\sin\theta$$

(答)　$l > \frac{2Mg}{k}\sin\theta$

【(b)の別解】

小球 A について

（$x = 2l$ での弾性力と重力による位置エネルギー）

＞（$x = l$ での弾性力と重力による位置エネルギー）

となればよいので

$$\frac{1}{2}k(2l - l)^2 - Mg \cdot 2l\sin\theta > -Mg \cdot l\sin\theta$$

〔A〕 22 点

(a) 5 点

＊力のつり合いの式に 2 点

＊答に 3 点

(b) 5 点

＊位置についての不等式に 2 点

＊答に 3 点

＊等号の有無は不問

【(b)の別解】5 点

＊エネルギーについての不等式に 2 点

＊答に 3 点

＊等号の有無は不問

$$\therefore l > \frac{2Mg}{k}\sin\theta \ (\because l > 0)$$

(答) $l > \dfrac{2Mg}{k}\sin\theta$

(c)

ゴムひもが張っている間，小球 A は単振動し位置 x_A は

$$x_A = \frac{2Mg}{k}\sin\theta\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t + \frac{4Mg}{k}\sin\theta$$

で表されるので，初めて $x_A = l = \dfrac{3Mg}{k}\sin\theta$ となるのは

$$\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore t_1 = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

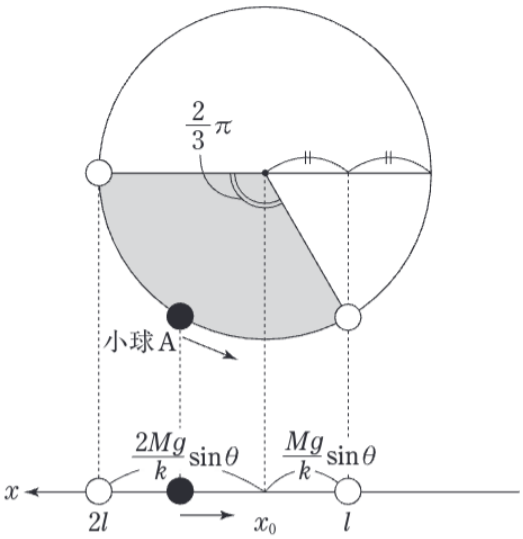
(答) $t_1 = \dfrac{2}{3}\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

【(c)の別解】

単振動の周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ を用いると，以下の図より

$$t_1 = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}T$$

$$= \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$



(c) 5 点

＊ x_A の式に 2 点

＊答に 3 点

【(c)の別解】 5 点

＊ $t = 0$ から t_1 が周期の何分の一かに着目して 2 点

＊答に 3 点

(答) $t_1 = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

(d)

小球 A の $t = t_1$ における速度 $v'(<0)$ は，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv'^2 - Mg \cdot l\sin\theta = \frac{1}{2}kl^2 - Mg \cdot 2l\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow v' = -\sqrt{\frac{3M}{k}}g\sin\theta$$

であるから，小球 A が $x = l$ から最高点に到達するまでにかかる時間 t' は

$$v' + g\sin\theta \cdot t' = 0$$

$$\therefore t' = \sqrt{\frac{3M}{k}}$$

となる。最高点に到達する前後の運動の対称性から

$$t_2 = 2(t_1 + t')$$

$$= \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{\frac{M}{k}}$$

(答) $t_2 = \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{\frac{M}{k}}$

〔B〕

(e)

小球 A の運動方程式:

$$Ma_A = Mg\sin\theta - k(x_A - x_B - l)$$

小球 B の運動方程式:

$$ma_B = mg\sin\theta + k(x_A - x_B - l)$$

(f)

小球 A と小球 B をひとつの物体とみなすと質量 $M + m$ の物体が加速度 $g\sin\theta$，$t = 0$ における位置 $\frac{2lM}{M+m}$ で等加速度直線運動するので

$$x_G = \frac{1}{2}g\sin\theta \cdot t^2 + \frac{2lM}{M+m}$$

(d) 7 点

＊ $t = t_1$ における速度に 2 点

＊ $t = t_1$ から元の位置に戻るまでの時間，または最高点に到達するまでの時間に 2 点

＊答に 3 点

〔B〕 28 点

(e) 4 点

＊小球 A の運動方程式に 2 点

＊小球 B の運動方程式に 2 点

(f) 5 点

＊重心が等加速度直線運動することに 2 点

＊ $t = 0$ における重心の位置に 2 点

＊答に 1 点

(答) $x_G = \frac{1}{2} g \sin\theta \cdot t^2 + \frac{2lM}{M+m}$

(g)

(小球 A の運動方程式)× m −(小球 B の運動方程式)× M より

$$Mm(a_A - a_B) = -(M+m)k(x_A - x_B - l)$$

$$\Leftrightarrow a_r = -\frac{(M+m)k}{Mm}(x_r - l)$$

であり，これは小球 B から見て小球 A が単振動することを表す。$t=0$ のときにゴムひもの伸びは最大で，そのときのゴムひもの長さが $2l$ だから

$$x_r = l\cos\sqrt{\frac{(M+m)k}{Mm}}t + l$$

(答) $x_r = l\cos\sqrt{\frac{(M+m)k}{Mm}}t + l$

(g) 6 点

＊ x_r の従う運動方程式(すなわち x_r と a_r の関係式)に 3 点

＊答に 3 点

(h)

問(g)の答の式で $x_r = l$ とすると

$$\cos\sqrt{\frac{(M+m)k}{Mm}}t_3 = 0$$

$$\therefore t_3 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$$

(答) $t_3 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$

(h) 5 点

＊答に 5 点

(i)

$t = t_3$ における小球 B から見た小球 A の速度は

$$-l \times \sqrt{\frac{(M+m)k}{Mm}}$$

であり，位置は l 離れている。小球 A と小球 B は $t = t_3$ 以降近づくように運動し，このときの加速度は等しいので，衝突する。

その時刻は

(i) 8 点

＊ $t = t_3$ において，小球 B からみて小球 A が近づいてくること(相対速度が負になること)に 2 点

＊ $t = t_3$ 以降，小球 A と B は等加速度で運動することに 1 点

$$t_4 = t_3 + \frac{l}{l\sqrt{\frac{(M+m)k}{Mm}}}$$

$$= t_3 + \sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$$

(答) 衝突する，$t_4 = t_3 + \sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$

＊衝突することに 1 点

＊t_4 に 4 点

2 （５０点）

【解答・採点基準】

〔A〕

(a)

コンデンサーC_1には E の電圧がかかるので

$$Q_1 = C_{in}E$$

である。また，エネルギー保存則より

$$Q_1E = W + \frac{1}{2}Q_1E$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}C_{in}E^2$$

となる。

(答) $Q_1 = C_{in}E,\ W = \frac{1}{2}C_{in}E^2$

(b)

操作 2 後にコンデンサーC_1に蓄えられた電気量を $Q_1^{(1)}$ とすると，電気量保存の法則より

$$Q_1 = Q_1^{(1)} + Q_2^{(1)}$$

が成り立つ。また，キルヒホッフの第二法則より

$$\frac{Q_1^{(1)}}{C_{in}} = \frac{Q_2^{(1)}}{C_{out}}$$

が成り立つ。よって, 2 式より，問(a)の結果を用いて

$$Q_1 = \left(\frac{C_{in}}{C_{out}} + 1\right)Q_2^{(1)}$$

$$\therefore Q_2^{(1)} = \frac{C_{in}C_{out}}{C_{in} + C_{out}}E$$

となる。

(答) $Q_2^{(1)} = \frac{C_{in}C_{out}}{C_{in} + C_{out}}E$

(c)

〔A〕 26 点

(a) 4 点

＊エネルギー保存則の立式に 2 点

＊答に各 1 点×2

(b) 5 点

＊電気量保存の法則の立式に 2 点

＊キルヒホッフの第二法則の立式に 2 点

＊答に 1 点

(c) 6 点

＊電気量保存の法則

試行 A を $n+1$ 回繰り返して十分に時間が経過したときにコンデンサーC_1に蓄えられた電気量を $Q_1^{(n+1)}$ とすると，電気量保存の法則より

$$Q_1 + Q_2^{(n)} = Q_1^{(n+1)} + Q_2^{(n+1)}$$

が成り立つ。また，キルヒホッフの第二法則より

$$\frac{Q_1^{(n+1)}}{C_{in}} = \frac{Q_2^{(n+1)}}{C_{out}}$$

が成り立つ。よって, 2 式より，問(a)の結果を用いて

$$Q_1 + Q_2^{(n)} = \left(\frac{C_{in}}{C_{out}} + 1\right) Q_2^{(n+1)}$$

$$\therefore Q_2^{(n+1)} = \frac{C_{out}}{C_{in} + C_{out}}\left(C_{in}E + Q_2^{(n)}\right)$$

となる。

(答) $Q_2^{(n+1)} = \dfrac{C_{out}}{C_{in} + C_{out}}\left(C_{in}E + Q_2^{(n)}\right)$

(d) ⑦

(e)

問(c)で得られた数列 $\{Q_2^{(n)}\}$ の漸化式において，

$d = \dfrac{C_{out}}{C_{in} + C_{out}}$ とおくと

$$Q_2^{(n+1)} = Q_2^{(1)} + dQ_2^{(n)} \left(\because Q_2^{(1)} = \frac{C_{in}C_{out}}{C_{in} + C_{out}}E\right)$$

$$\Leftrightarrow Q_2^{(n+1)} - \frac{Q_2^{(1)}}{1-d} = d\left(Q_2^{(n)} - \frac{Q_2^{(1)}}{1-d}\right)$$

と表せるので，この漸化式を解くと

$$Q_2^{(n)} = \left(Q_2^{(1)} - \frac{Q_2^{(1)}}{1-d}\right)d^{n-1} + \frac{Q_2^{(1)}}{1-d}$$

$$= \frac{1-d^n}{1-d}Q_2^{(1)}$$

となる。ここで, $0 < d < 1$ であるから，試行 A を無限回繰り返したときにコンデンサーC_2に蓄えられる電気量を $Q_2^{(\infty)}$ とし, $n \to \infty$の極限をとると

の立式に 2 点

＊キルヒホッフの第二法則の立式に 2 点

＊答に 2 点

(d) 5 点

(e) 6 点

＊漸化式の立式に 1 点

＊$Q_2^{(n)}$に 1 点

＊$Q_2^{(\infty)}$に 1 点

＊答に 3 点

$$Q_2^{(\infty)} = \frac{1}{1-d} Q_2^{(1)}$$
$$= \frac{1}{1-\dfrac{C_{out}}{C_{in}+C_{out}}} \times \frac{C_{in}C_{out}}{C_{in}+C_{out}} E$$
$$= C_{out}E$$

となるから，求める電圧 V_{out} は

$$V_{out} = E$$

である。

(答) $V_{out} = E$

(e)［別解］

コンデンサーC_2は試行 A を繰り返していくと，操作 1 後のコンデンサーC_1と同電圧に近づくように充電されていくので，求める電圧 V_{out} は

$$V_{out} = E$$

である。

(答) $V_{out} = E$

〔B〕

(f)

$\frac{T}{2}$ の時間で電荷が移動しきるので，十分に時間が経った $t = T$ において，負荷抵抗には電流が流れない。よって，キルヒホッフの第二法則より，コンデンサーC_2の電圧は 0 であり，コンデンサーC_1は $t = \frac{T}{2}$ に操作 X を行う前のときと逆向きに直流電源の電圧が供給される。したがって

$$Q_1' = C_{in}E,\ Q_2' = 0$$

である。

(答) $Q_1' = C_{in}E,\ Q_2' = 0$

(g)

(ア)	②
(イ)	①
(ウ)	$C_{in}E$
(エ)	2

(e)［別解］6 点

＊「コンデンサーC_2の電圧が操作 1 後のコンデンサーC_1と同電圧に近づく」という記述に 3 点

＊答に 3 点

〔B〕 24 点

(f) 6 点

＊「負荷抵抗に電流が流れない」という記述に 2 点

＊答に各 2 点×2

(g) 6 点

＊(ア),(イ)に各 1 点×2

＊(ウ),(エ)に各 2 点×2

(h) T_{2n} の期間では, T_{2n-1} の期間にコンデンサーC_2 が放電した分を補う電荷と，負荷抵抗を通過する電荷がコンデンサーC_1 の放電によって供給されるので，直流電源を $2Q_0$ の電荷が通過する。T_{2n+1} の期間では, T_{2n} の期間にコンデンサーC_1 が放電した分を補う電荷が供給されるので，直流電源を $2Q_0$ の電荷が通過する。よって, 1 周期の間に直流電源に流れる電流は $$\frac{2Q_0+2Q_0}{T}=2I_L$$ であるから，求める単位時間あたりの仕事 P_E は $$P_E=2I_LE$$ となる。 (答) $P_E=2I_LE$	(h) 6 点 ＊「T_{2n} の期間で直流電源を $2Q_0$ の電荷が通過する」という記述に 2 点 ＊「T_{2n+1} の期間で直流電源を $2Q_0$ の電荷が通過する」という記述に 2 点 ＊答に 2 点
(h) ［別解］ 内部抵抗が無視でき，さらに 1 周期の前後でコンデンサーC_1, C_2 に蓄えられている静電エネルギーの変化量は 0 であるから，エネルギー保存則より，求める単位時間あたりの仕事 P_E は負荷抵抗の消費電力に等しい。したがって $$P_E=2I_LE$$ となる。 (答) $P_E=2I_LE$	(h)［別解］6 点 ＊静電エネルギーの変化量に 2 点 ＊エネルギー保存則に 2 点 ＊答に 2 点
(i) ①	(i) 6 点

3 （５０点）

【解答・採点基準】

〔A〕

(a)

気球が浮かび上がるための条件は

$$\rho_0 Vg > Mg$$
$$\therefore M < \rho_0 V$$

(答) $M < \rho_0 V$

(b)

力のつり合いより

$$\rho_0 Vg = Mg + \rho_1 Vg$$
$$\therefore \rho_1 = \rho_0 - \frac{M}{V}$$

(答) $\rho_1 = \rho_0 - \frac{M}{V}$

(c)

(ア) $\frac{\rho_0 V}{w}$

(イ) $\frac{P_0 V}{RT_0}$

(ウ) $\frac{R}{w}$

(エ) $\frac{\rho_0 V}{\rho_0 V - M} T_0$

(d)

状態 1 から状態 2 への変化は断熱変化なので, (体積)・(温度)$^{\gamma-1}$ = (一定)より

$$T_1 V^{\gamma-1} = T_2 (V + \Delta V)^{\gamma-1}$$
$$\therefore T_2 = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{1-\gamma} T_1$$

または

〔A〕 30 点

(a) 4 点

＊不等式の立式に 2 点

＊答に 2 点

(b) 4 点

＊力のつり合いの立式に 2 点

＊答に 2 点

(c) 8 点

(ア) 2 点

(イ) 2 点

(ウ) 2 点

(エ) 2 点

(d) 6 点

＊断熱変化であることを記述して 2 点

＊状態 1 と状態 2 の間で断熱変化の関係式を用いて 2 点

＊答に 2 点

$$\therefore T_2 = \left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^{\gamma-1} T_1$$

(答) $T_2 = \left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{1-\gamma} T_1$ または $T_2 = \left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^{\gamma-1} T_1$

(e)

気球内の気体の物質量を n_1，内部エネルギー変化を ΔU とする。状態 1 において状態方程式より

$$n_1 = \frac{P_0 V}{RT_1}$$

であり，求める仕事 W は球皮内の気体が大気にした仕事が $P_0 \Delta V$ であることに注意すると，熱力学第一法則より

$$\begin{aligned} W &= P_0 \Delta V + \Delta U \\ &= P_0 \Delta V + n_1 \frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1) \\ &= P_0 \Delta V + \frac{P_0 V}{RT_1} \cdot \frac{R}{\gamma-1} \cdot \left\{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{1-\gamma} - 1\right\} T_1 \\ &= P_0 \Delta V - \frac{P_0 V}{\gamma-1}\left\{1-\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{1-\gamma}\right\} \end{aligned}$$

(答) $W = P_0 \Delta V - \frac{P_0 V}{\gamma-1}\left\{1-\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{1-\gamma}\right\}$

〔B〕

(f)

問(c)(ウ)の結果より

$$\frac{P(z)}{\rho(z)T(z)} = \frac{R}{w}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \rho(z) &= \frac{wP(z)}{RT(z)} \\ &= \frac{wP_0\{1-\alpha(z-h)\}}{RT_0\{1-\beta(z-h)\}} \\ &= \frac{1-\alpha(z-h)}{1-\beta(z-h)}\rho_0 \end{aligned}$$

(答) $\rho(z) = \frac{1-\alpha(z-h)}{1-\beta(z-h)}\rho_0$

(g)

状態 1 と状態 3 での気球の力のつり合いはそれぞれ

(e) 8 点

＊n_1 を求めて 2 点

＊熱力学第一法則の立式に 2 点

＊ΔU を正しく求めて 1 点

＊答に 3 点

〔B〕 20 点

(f) 6 点

＊密度，圧力，温度の関係式を用いて 3 点

＊答に 3 点

(g) 6 点

＊力のつり合いの立

$$\begin{cases} \rho_0 Vg = Mg + n_1 wg \\ \rho(h+z_0)(V+\Delta V)g = Mg + n_1 wg \end{cases}$$

であり, 2 式より

$$\rho(h+z_0) = \frac{V}{V+\Delta V}\rho_0$$

(答) $\rho(h+z_0) = \dfrac{V}{V+\Delta V}\rho_0$

式に各 2 点×2

＊答に 2 点

(g) ［別解］

状態 1 と状態 3 での気球全体の質量は変化せず，どちらも重力と浮力がつり合っているから浮力の大きさは等しい。よって

$$\rho_0 Vg = \rho(h+z_0)(V+\Delta V)g$$

$$\therefore \rho(h+z_0) = \frac{V}{V+\Delta V}\rho_0$$

(答) $\rho(h+z_0) = \dfrac{V}{V+\Delta V}\rho_0$

(g) ［別解］ 6 点

＊浮力の大きさが等しくなる説明に 2 点

＊上記の立式に 2 点

＊答に 2 点

(h)

(f)の結果より

$$\rho(h+z_0) = \frac{1-\alpha z_0}{1-\beta z_0}\rho_0$$

$$\fallingdotseq (1-\alpha z_0)(1+\beta z_0)\rho_0$$

であり 2 次の微小量を含む項を無視して

$$\rho(h+z_0) \fallingdotseq \{1-(\alpha-\beta)z_0\}\rho_0$$

となる。また，問(g)の結果より

$$\rho(h+z_0) = \left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{-1}\rho_0$$

$$\fallingdotseq \left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)\rho_0$$

となるから, 2 式より

$$z_0 = \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{\Delta V}{V}$$

(答) $z_0 = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\dfrac{\Delta V}{V}$

(h) 8 点

＊2 通りで表される $\rho(h+z_0)$ から連立して z_0 を求める方針に 2 点

＊ $(1-\beta z_0)^{-1}$ を正しく近似して 1 点

＊2 次の微小量を含む項を無視して 2 点

＊ $\left(1+\dfrac{\Delta V}{V}\right)^{-1}$ を正しく近似して 1 点

＊答に 2 点