２０２５年度　第１回　一橋大本番レベル模試

数学

Ⅰ　（５０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

$$a_{n+1} < (a_n+1)^2$$
$$\Leftrightarrow a_n{}^2 + n^2 < a_n{}^2 + 2a_n + 1$$
$$\Leftrightarrow a_n > \frac{n^2-1}{2} \text{ (A)}$$

となるから，$n \geqq 2$ について，$a_n > \dfrac{n^2-1}{2}$ となることを数学的帰納法を用いて証明する。(B)

[1]　$n=2$ のとき

$a_2 = a_1{}^2 + 1^2 = 5$ より

$$\frac{2^2-1}{2} = \frac{3}{2} < 5 = a_2$$

となる。よって，$n=2$ のとき $a_n > \dfrac{n^2-1}{2}$ は成立する。(C)

[2]　$n=k$ (k は 2 以上の自然数)のとき

$a_k > \dfrac{k^2-1}{2}$ が成立すると仮定する。$n=k+1$ のとき，

$$a_{k+1} - \frac{(k+1)^2-1}{2} = a_k{}^2 + k^2 - \frac{k^2+2k}{2}$$
$$> \left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2 + k^2 - \frac{k^2+2k}{2} \text{ (D)}$$
$$= \frac{k^4-4k+1}{4}$$
$$= \frac{k(k^3-4)+1}{4}$$
$$> 0 \quad (\because k^3 \geqq 2^3 > 4)$$

(Ⅰ)　30 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(A) $a_n > \dfrac{n^2-1}{2}$ ‥5 点

(B)数学的帰納法を用いる方針に‥5 点

(C) $n=2$ のときの成立を示して‥5 点

(D) $a_{k+1} - \dfrac{(k+1)^2-1}{2}$ を k の式で不等式評価して‥5 点

となり，$n=k+1$ も $a_n > \dfrac{n^2-1}{2}$ は成立する。(E)

[1], [2]より $n \geqq 2$ に対して，$a_{n+1} < (a_n+1)^2$ が成立する。(F)

(証明終)

(1)[別解]

$a_{n+1} = a_n{}^2 + n^2$ より $a_n{}^2 - a_{n+1} = -n^2$ となる。また，$a_{n+1} = a_n{}^2 + n^2$ かつ $a_1 = 2$ より帰納的に数列 $\{a_n\}$ は1以上の値をとる数列である。(G)よって，

$$a_{n+1} = a_n{}^2 + n^2 \geqq 1^2 + n^2$$

より $n \geqq 2$ に対して，$a_n \geqq (n-1)^2 + 1$ が成立する。(H)したがって，$n \geqq 2$ に対して，

$$(a_n+1)^2 - a_{n+1} = (a_n{}^2 - a_{n+1}) + 2a_n + 1$$

$$\geqq -n^2 + 2\{(n-1)^2+1\} + 1 \text{(I)}$$

$$= n^2 - 4n + 5$$

$$= (n-2)^2 + 1 \text{(J)}$$

$$> 0 \text{(F)}$$

となる。

(証明終)

(E) $n=k+1$ のときの成立を示して‥5 点

(F)結論に‥5 点

(I)[別解]　30 点 (G)(H)(I)(J)(F)

(G) $a_n \geqq 1$‥5 点

(H) $a_n \geqq (n-1)^2 + 1$‥5 点

(I) $(a_n+1)^2 - a_{n+1}$ を n の式で不等式評価して‥10 点

(J)平方完成した式に‥5 点

(F)結論に‥5 点

(2)

$a_1 = 2$ であり，a_1 は平方数ではない。$a_2 = a_1{}^2 + 1^2 = 5$ より a_2 は平方数ではない。(A)また，$a_{n+1} = a_n{}^2 + n^2$ であり，$n > 0$ より $a_n{}^2 < a_{n+1}$ となる。(B)よって，(1)と合わせて，$n \geqq 2$ に対して，$a_n{}^2 < a_{n+1} < (a_n+1)^2$ となり，$n \geqq 3$ に対して，数列 $\{a_n\}$ の項は連続する平方数の間に存在し，平方数ではない。(C)したがって，$n=1, 2$ と合わせて，数列 $\{a_n\}$ の項に平方数が含まれない。

(証明終)

(2)　20 点 (A)(B)(C)

(A) $n=1, 2$ のときの成立を示して‥5 点

(B) $a_n{}^2 < a_{n+1}$‥5 点

(C) $n \geqq 3$ のときの成立を示して‥10 点

2 （５０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

円 C と曲線 D の共有点は曲線 D 上にあるため，共有点の座標を $\left(t,\ at^2+\frac{1}{4}\right)$ とおく。このとき，$y=ax^2+\frac{1}{4}$ において，$y'=2ax$ より点 $\left(t,\ at^2+\frac{1}{4}\right)$ における曲線 D の接線の傾きは $2at$ となる。(A)また，点 $\left(t,\ at^2+\frac{1}{4}\right)$ における円 C の接線の方程式は

$$tx+\left(at^2+\frac{1}{4}\right)y=1$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{t}{at^2+\frac{1}{4}}x+\frac{1}{at^2+\frac{1}{4}}\left(\because at^2+\frac{1}{4}\neq 0\right)$$

となる。(B)それぞれの接線が直交する条件は 2 つの接線の傾きが -1 となることである。よって，

$$2at\cdot\left(-\frac{t}{at^2+\frac{1}{4}}\right)=-1\ \text{(C)}$$

$$\Leftrightarrow 2at^2=at^2+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow at^2=\frac{1}{4}$$

となる。$at^2=\frac{1}{4}$ を代入して，共有点は点 $\left(t,\ \frac{1}{2}\right)$ となる。この共有点は円 C 上にあるため，

$$t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1\ \text{(D)}\Leftrightarrow t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。$at^2=\frac{1}{4}$ に $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ を代入して，

(1)　25 点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A)曲線 D の接線の傾きを求めて‥5 点

(B)円 C の接線の傾きを求めて‥5 点

(C)直交する条件を利用して‥5 点

(D)接点が円 C と曲線 D の共有点であることを利用して‥5 点

$$a\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}\text{(E)}$$

となる。

(答) $a=\frac{1}{3}$

(E) $a=\frac{1}{3}$ ‥5 点

(1)[別解]

円 C と曲線 D の共有点は円 C 上にあるため，共有点の座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とおく。このとき，$y=ax^2+\frac{1}{4}$ において，$y'=2ax$ より点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ における曲線 D の接線の方程式は

$$y=2a\cos\theta(x-\cos\theta)+a\cos^2\theta+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow y=(2a\cos\theta)x-a\cos^2\theta+\frac{1}{4}\text{(A)}$$

となる。ここで，円 C における接線と原点から共有点を結ぶ直線は直交するため，曲線 D の接線は原点を通る。(F)よって，

$$0=(2a\cos\theta)\cdot 0-a\cos^2\theta+\frac{1}{4}\text{(G)}\Leftrightarrow a\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

となる。この共有点は曲線 D 上にあるため，

$$\sin\theta=a\cos^2\theta+\frac{1}{4}\text{(D)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\because a\cos^2\theta=\frac{1}{4}\right)$$

となる。このとき，$a\cos^2\theta=\frac{1}{4}$ に $\sin\theta=\frac{1}{2}$ を代入して，

$$a(1-\sin^2\theta)=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}\text{(E)}$$

となる。

(答) $a=\frac{1}{3}$

(1)[別解] 25 点 (A)(F)(G)(D)(E)

(A)曲線 D の接線の方程式を求めて‥5 点

(F)円 C の接線と直交する条件を曲線 D の接線が原点を通ることに言い換えて‥5 点

(G)直交する条件を式で表して‥5 点

(D)接点が円 C と曲線 D の共有点であることを利用して‥5 点

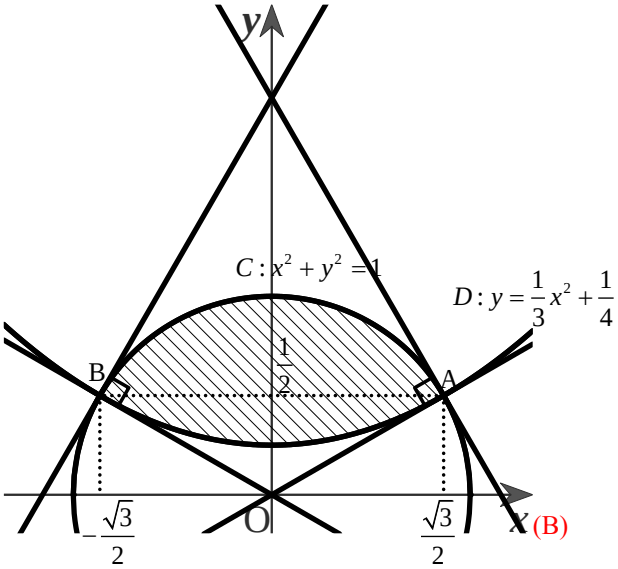
(E) $a=\frac{1}{3}$ ‥5 点

(2)

(2) 25 点 (A)(B)(C)(D)

座標平面上の原点を O とする。(1)より円 C と曲線 D の共有点は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となり，それぞれ点 $\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ とする。このとき，$\angle \mathrm{AOB} = \frac{2}{3}\pi$ となる。(A)求める面積は以下の斜線部である。

(A)共有点と中心角を求めて
‥5 点(完答)



(B)

(B)求める面積を図示して‥5 点

求める面積は扇形 OAB の面積と線分 AB と曲線 D で囲まれた部分の面積から三角形 OAB の面積を引いたものである。したがって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{2}{3}\pi + \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}\right)\right\} dx - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} \quad \text{(C)}$$

$$= \frac{1}{3}\pi + 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}\right) dx - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{3}\pi + 2\left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{3}\pi + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{12} \quad \text{(D)}$$

となる。

(C)求める面積を立式して‥5 点

(D) $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{12}$ ‥10 点

(答) $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{12}$

(2)[別解] (図示までは同じ) (A)(B)

(2)[別解] 25 点 (A)(B)(E)(D)
(A)共有点と中心角を求めて

(1)より曲線 D の共有点における接線の方程式はそれぞれ

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ となる。求める面積は扇形OABの面積から曲線 D と直線 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ で囲まれた部分の面積を引いたものである。求める面積は y 軸対称性より

$$2\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\pi-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right\}dx\right]\text{(E)}$$

$$=2\left\{\frac{1}{6}\pi-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2dx\right\}$$

$$=2\left\{\frac{1}{6}\pi-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{6}\pi-\frac{1}{9}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{12}\text{(D)}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{12}$

‥5 点(完答)

(B)求める面積を図示して‥5 点

(E)求める面積を立式して‥5 点

(D) $\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{12}$ ‥10 点

3 （５０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

題意より

$$PQ^2=(2\cos\theta+\cos 2\theta+1)^2+(2\sin\theta-\sin 2\theta)^2$$

である。２倍角の公式より，

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

を代入すると，

$$PQ^2=(2\cos^2\theta+2\cos\theta)^2+(2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)^2 \text{(A)}$$

$$=4\cos^2\theta(1+\cos\theta)^2+4\sin^2\theta(1-\cos\theta)^2$$
$$=4\cos^2\theta(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)+4\sin^2\theta(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=(4\cos^2\theta+4\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta)+(4\cos^2\theta-4\sin^2\theta)\cdot 2\cos\theta$$
$$=4+4\cos^2\theta+8\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=4+4\cos^2\theta+8\cos\theta(2\cos^2\theta-1)$$
$$=4(4\cos^3\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta+1) \text{(B)}$$

となる。ここで $\cos\theta=t$ として，

$$f(t)=4t^3+t^2-2t+1$$

とする。$f(t)$ を t で微分すると

$$f'(t)=12t^2+2t-2$$
$$=2(6t^2+t-1) \quad \text{(C)}$$
$$=2(3t-1)(2t+1)$$

となるから，$f'(t)=0$ のとき，$t=-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ (D)である。$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$ のとき

$-\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ (E)であるから，この範囲で $f(t)$ の増減を調べると次のようになる。(F)

50 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)(H)

(A) PQ^2 を $\sin\theta$, $\cos\theta$ の式で表す‥5 点

(B) PQ^2 を $\cos\theta$ の 3 次式で表す‥15 点

(C) $f(t)$ の導関数‥5 点

（$t=\cos\theta$ で微分しているのに左辺が $f'(\theta)$ となっているものには加点しない）

(D) $f'(t)=0$ を満たす t の値‥5 点

(E) t のとりうる値の範囲‥5 点

t	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

したがって，$f(t)$ は $t=\frac{1}{3}$ で最小値 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{27}$ をとる。このとき，

$$\mathrm{PQ}^2=\frac{64}{27}$$

$$\therefore \mathrm{PQ}=\frac{8}{3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

となる。よって，PQ は $\cos\theta=\frac{1}{3}$ のとき(G)に最小値 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ (H)をとる。

(答) $\cos\theta=\frac{1}{3}$ のとき最小値 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

(F) $-\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ **における増減‥5 点**

(G) $\cos\theta=\frac{1}{3}$ **のときに最小‥5 点**

(H) PQ **の最小値‥5 点**

4 （５０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

点 G は△ OAB の重心より

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\ \text{(A)}$$

となる。また，点 G は直線 ST 上の点より実数 m を用いて，

$$\overrightarrow{OG}=m\overrightarrow{OS}+(1-m)\overrightarrow{OT}$$
$$=ms\overrightarrow{OA}+(1-m)t\overrightarrow{OB}\ \text{(B)}$$

と表せる。$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は一次独立より

$$\begin{cases} ms=\dfrac{1}{3} \\ (1-m)t=\dfrac{1}{3} \end{cases}\ \text{(C)}$$

となる。$ms=\dfrac{1}{3}$ であり，$0<s<1$ より $m=\dfrac{1}{3s}$ となる。これを

$(1-m)t=\dfrac{1}{3}$ に代入して，

$$\left(1-\frac{1}{3s}\right)t=\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow (3s-1)t=s$$

となる。ここで，$s=\dfrac{1}{3}$ のとき，等号が成立せず，不適である。(D)

よって，$s\neq\dfrac{1}{3}$ となり，$t=\dfrac{s}{3s-1}$ (E)となる。

(答) $t=\dfrac{s}{3s-1}$

(1)[別解]

$$\overrightarrow{OS}=s(2,1)=(2s,s)$$
$$\overrightarrow{OT}=t(1,-1)=(t,-t)$$

となる。点 G は△ OAB の重心より

(1)　25 点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ‥5 点

(B) 点 G が直線 ST 上の点であることから $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で表して‥5 点

(C) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ が一次独立であることから連立方程式を立式して‥5 点

(D) $s=\dfrac{1}{3}$ のとき不適‥5 点

(E) $t=\dfrac{s}{3s-1}$ ‥5 点

(1)[別解]　25 点 (A)(B)(C)(D)(E)

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(2,1)+\frac{1}{3}(1,-1)=(1,0)\ \text{(A)}$$

となる。3 点 S, T, G が一直線上にあるため，実数 n を用いて，

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OG}+n\overrightarrow{GS}$$
$$\Leftrightarrow (t,-t)=(1,0)+n(2s-1,s)\ \text{(B)}$$

となる。よって，

$$\begin{cases} t=1+n(2s-1) \\ -t=ns \end{cases}\ \text{(C)}$$

となる。$ns=-t$ であり，$0<s<1$ より $n=-\dfrac{t}{s}$ となる。これを

$t=1+n(2s-1)$ に代入して，

$$t=1-\frac{t}{s}(2s-1)$$
$$\Leftrightarrow (3s-1)t=s$$

となる。ここで，$s=\dfrac{1}{3}$ のとき，等号が成立せず，不適である。(D)

よって，$s\neq\dfrac{1}{3}$ となり，$t=\dfrac{s}{3s-1}$ (E)となる。

(答) $t=\dfrac{s}{3s-1}$

(A) $G(1,0)$ ‥5 点

(B) 点 G が直線 ST 上の点であることを用いて‥5 点

(C) 連立方程式を立式して‥5 点

(D) $s=\dfrac{1}{3}$ のとき不適‥5 点

(E) $t=\dfrac{s}{3s-1}$ ‥5 点

(2)

$S(2s,s)$, $T(t,-t)$ より △OST の面積は，

$$\frac{1}{2}\left|2s\cdot(-t)-s\cdot t\right|=\frac{3}{2}st\quad(\because s>0,t>0)\ \text{(A)}$$

となる。$t=\dfrac{s}{3s-1}$ であり，$s>0, t>0$ より $3s-1>0$ となる。

$t=\dfrac{s}{3s-1}$ を代入して，△OST の面積は，

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{s^2}{3s-1}=\frac{1}{6}\left\{(3s+1)+\frac{1}{3s-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{(3s-1)+\frac{1}{3s-1}+2\right\}\ \text{(B)}$$

であり，$3s-1$, $\dfrac{1}{3s-1}$ はともに正より相加平均・相乗平均の関係の不等式から

(2)　25 点 (A)(B)(C)(D)

(A) △OST $=\dfrac{3}{2}st$ ‥5 点

(B) △OST の面積を s で表し，$(3s-1)$ について表して‥5 点

$$\frac{1}{6}\left\{(3s-1)+\frac{1}{3s-1}+2\right\} \geqq \frac{1}{6}\left\{2\sqrt{(3s-1)\cdot\frac{1}{3s-1}}+2\right\}=\frac{2}{3}$$

となる。等号成立は $3s-1=\frac{1}{3s-1} \Leftrightarrow s=\frac{2}{3}\ (\because 0<s<1)$ のときである。(C)このとき，$t=\frac{s}{3s-1}$ に $s=\frac{2}{3}$ を代入して，$t=\frac{2}{3}$ となり，$0<t<1$ を満たす。

(答) △OST の最小値：$\frac{2}{3}$，$(s,t)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ のとき(D)

(2)[別解] (△OST を s で表すまでは同じ) (A)

よって，$t=\frac{s}{3s-1}$ を代入して，

$$\frac{3}{2}s\cdot\frac{s}{3s-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{s^2}{3s-1}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{s}-\frac{1}{s^2}} \text{(E)}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{-\left(\frac{1}{s}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}} \text{(F)}$$

となる。$\frac{1}{s}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow s=\frac{2}{3}$ のとき，△OST は最小値 $\frac{2}{3}$ をとる。このとき，$t=\frac{s}{3s-1}$ に $s=\frac{2}{3}$ を代入して，$t=\frac{2}{3}$ となり，$0<t<1$ を満たす。

(答) △OST の最小値：$\frac{2}{3}$，$(s,t)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ のとき(D)

(C)相加平均・相乗平均の関係の不等式を用い，$s=\frac{2}{3}$ のとき等号が成立することに‥5 点

(D)答に‥10 点(各 5 点×2)

(2)[別解] 25 点 (A)(E)(F)(D)

(A)△OST $=\frac{3}{2}st$ ‥5 点

(E)△OST の面積を s で表し，$\frac{1}{s}$ について表して‥5 点

(F) $\frac{1}{s}$ について平方完成して，$s=\frac{2}{3}$ のとき最小値をとることに‥5 点

(D)答に‥10 点(各 5 点×2)

5 （５０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，結論とその導出過程の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

以下，すべてのカードを区別して考える。このとき，9 枚のカードから 3 枚のカードを選んで取り出すときの選び方は ${}_9C_3 = 84$(通り)で，同様に確からしい。また，3 枚のカードを選ぶと，これら 3 枚の数字の大小関係から，3 桁の整数 X はひとつに定まる。

(1)

X が 5 で割り切れるのは，一の位，つまり選んだ 3 枚のうち最小のものが 0 あるいは 5 の場合である。5 以上のカードは 1 枚しかなく，最小のものは 5 にならないから，最小のものが 0 の場合のみを考える(A)。以下，余事象の確率，すなわち一の位が 0 とならない確率 $1-p$ を考える。一の位が 0 とならないのは，0 以外のカード 7 枚から 3 枚選ぶ場合であるから，このような選び方は

$${}_7C_3 = 35\text{(通り)}\text{(B)}$$

である。したがって，求める確率は

$$p = 1 - \frac{35}{84} = \frac{7}{12}\text{(C)}$$

である。

(答) $p = \dfrac{7}{12}$

(1)[別解]

X が 5 で割り切れるのは，一の位，つまり選んだ 3 枚のうち最小のものが 0 あるいは 5 の場合である。5 以上のカードは 1 枚しかなく，最小のものは 5 にならないから，最小のものが 0 の場合のみを考える(A)。以下，十の位が 0 かどうかで場合分けを行う。

[1] 十の位が 0 のとき

0 以外のカード 7 枚から 1 枚と 0 のカードを 2 枚選ぶ場合であるから，このような選び方は

$${}_7C_1 \cdot 1 = 7\text{(通り)}\text{(D)}$$

である。

[2] 十の位が 0 以外のとき

(1) 20 点 (A)(B)(C)

(A) X の一の位が 0 となることに言及して‥5 点

(B)余事象の(X の一の位が 0 とならないときの)カードの選び方の総数を求めて‥10 点

(C)確率 p を求めて‥5 点

(1)[別解] 20 点 (A)(D)(E)(C)

(A) X の一の位が 0 となることに言及して‥5 点

(D) X の十の位，一の位がともに 0 となるカードの選び方の総数を求めて‥5 点

0 以外のカード 7 枚から 2 枚と 0 のカードを 1 枚選ぶ場合であるから，このような選び方は

$${}_7C_2 \cdot 2 = 42\,(\text{通り})\text{(E)}$$

である。

以上, [1], [2]より，求める確率は

$$p = \frac{7+42}{84} = \frac{7}{12}\text{(C)}$$

である。

(答) $\frac{7}{12}$

(2)

X が 4 で割り切れるのは，X の下 2 桁(Y とする)が 4 で割り切れる場合である。すなわち，Y が 00, 20, 32, 40 のいずれか(A)となる場合である。以下，Y の値で場合分けを行う。

[1] Y が 00 のとき

$X = 100, 200, 300, 400, 500$ のいずれかで，このようになるカードの選び方は

$${}_7C_1 \cdot 1 = 7\,(\text{通り})\text{(B)}$$

である。

[2] Y が 20 のとき

$X = 220, 320, 420, 520$ のいずれかで，このようになるカードの選び方は

$$2+2\cdot2+2\cdot2+2\cdot2 = 14\,(\text{通り})\text{(C)}$$

である。

[3] Y が 32 のとき

$X = 432, 532$ のいずれかで，このようになるカードの選び方は

$$2+2 = 4\,(\text{通り})\text{(D)}$$

である。

[4] Y が 40 のとき

$X = 540$ で，このようになるカードの選び方は 2 通り(E)である。

以上, [1], [2], [3], [4]より，X が 4 で割り切れるようなカードの選び方は

$$7+14+4+2 = 27\,(\text{通り})$$

である。よって求める確率は

$$q = \frac{27}{84} = \frac{9}{28}\text{(F)}$$

である。

(E) X の十の位が 0 以外かつ一の位が 0 となるカードの選び方の総数を求めて‥5 点

(C)確率 p を求めて‥5 点

(2)　30 点 (A)(B)(C)(D)(E)(F)

(A) X の下 2 桁(Y)は 00, 20, 32, 40 のいずれか‥5 点

・4 で割り切れる X を過不足なく書き出せている場合も加点

$$\left(\begin{array}{l} X = 100, 200, 300, 400, 500, 220, \\ \quad 320, 420, 520, 432, 532, 540 \end{array}\right)$$

(B) X の下 2 桁が 00 のときのカードの選び方の総数を求めて‥5 点

(C) X の下 2 桁が 20 のときのカードの選び方の総数を求めて‥5 点

(D) X の下 2 桁が 32 のときのカードの選び方の総数を求めて‥5 点

(E) X の下 2 桁が 40 のときのカードの選び方の総数を求めて‥5 点

(F)確率 q を求めて‥5 点

(答) $\frac{9}{28}$