2022 年第 1 回北大本番レベル模試

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(150 点満点)

第 1 問（40 点満点）

(1)（配点 8 点）

- 直線 AB の方程式に 4 点
- 答えに 4 点

(2)（配点 12 点）

- $S(t)$ を t を用いて表して 4 点
- $y=S(t)$ のグラフに 8 点(不備に対しては 1 点ずつ減)

(3)（配点 20 点）

- $t^2-t=\dfrac{1}{4}$ となる t (場合分けの根拠となる t)を求めて 4 点
- 最大値をとる位置の 3 つの場合分けに 4 点
- 上記の 3 つの場合分けに対してそれぞれ最大値を求めて 12 点(各 4 点)

第 2 問（35 点満点）

(1)（配点 12 点）

- b_{n+1} を b_n を用いて表して 4 点
- $\{b_n\}$ の一般項を求める計算と答えに 8 点

(2)（配点 23 点）

- $\{a_n\}$ の一般項に 3 点
- $\sum_{k=1}^{n} k$ を求めて 4 点
- $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k$ を求める計算と答えに 12 点
- 答えに 4 点

第 3 問（35 点満点）

(1)（配点 7 点）

- 確率を求める計算に 3 点
- 答えに 4 点

(2)（配点 15 点）

- r_1, r_2, r_3 の 3 つの数の組合せが $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ となる確率をそれぞれ求めて 12 点(各 3 点)
- 答えに 3 点

(3)（配点 13 点）

- r_1, r_2, r_3 のうちいずれか 2 つが同じ数であり, 残りの 1 つが異なる数である事象を E としたとき, E が起こる確率を求めて 3 点
- X_1, X_2, X_3 がすべて異なる数である事象を F としたとき，事象 $E \cap F$ を正しく記述して 3 点
- 事象 $E \cap F$ が起こる確率を求めて 3 点
- 答えに 4 点

第 4 問（40 点満点）

(1)（配点 20 点）

- 2 つの曲線の方程式を連立して，y を消去し定数を分離した形で表して 4 点
- 上記の 3 次方程式の解を曲線 $y = x^3 + 5x^2 + 3x$ と直線 $y = a$ の共有点の個数で考える方針に 4 点
- $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x$ とおいて，$f(x)$ の増減を調べて 8 点
- a の値に 4 点

(2)（配点 20 点）

- 2 曲線の共有点の x 座標を求めて 4 点
- 曲線 C_1 と x 軸の交点の座標を求めて 4 点
- C_1 と C_2 で囲まれた部分のうち，$y \geqq 0$ を満たす部分の面積を求める式を立てて 4 点
- 答えに 8 点

【理系】（150点満点）

第1問（30点満点）

(1)（配点6点）

- $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|, \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めて3点
- 答えに3点

(2)（配点6点）

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ から s, t に関する等式を求めて3点
- 答えに3点

(3)（配点18点）

- 四面体ABCDの△ABCを底面とみて，△ABCの重心をGとするとき，高さがGDであることを述べて3点
- 上記のGの位置ベクトルを求めて2点
- 点Dの座標を求めて6点
- 線分GDの長さ，△ABCの面積をそれぞれ求めて4点(各2点)
- 答えに3点

第2問（30点満点）

(1)（配点4点）

- 答えに4点

(2)（配点11点）

- $\{b_n\}$ の一般項を求めて8点
- 答えに3点

(3)（配点15点）

- $\log a_n=\log n+\log 3^n+\log\left\{\frac{4}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ まで求められて5点
- $\frac{\log a_n}{n}$ を極限が求められる形まで変形できて2点
- $\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ を証明して5点
- 答えに3点

第3問（30点満点）

(1)（配点6点）

- $x=y=z$ となる組(x, y, z)の個数に3点
- 答えに3点

(2)（配点 12 点）

- 条件を満たすのが $x=y=0$ または $x=y=z$ のときであることを述べて 3 点
- $x=y=0$ のときの組 $(x,\,y,\,z)$ の個数を求めて 3 点
- $x=y=z$ のときの組 $(x,\,y,\,z)$ の個数を求めて 3 点
- 答えに 3 点

(3)（配点 12 点）

- $xy=yz,\,yz=zx,\,zx=xy$ がいずれも成り立つ組 $(x,\,y,\,z)$ の個数を求めて 3 点
- $xy=yz,\,yz=zx,\,zx=xy$ がいずれも成り立たない $x,\,y,\,z$ の条件を求めて 3 点
- $xy=yz,\,yz=zx,\,zx=xy$ がいずれも成り立たない組 $(x,\,y,\,z)$ の個数を求めて 3 点
- 答えに 3 点

第 4 問（30 点満点）

(1)（配点 12 点）

- $x^2+y^2-x-y-|x-y|=0$ の絶対値を外してそれぞれの円の中心と半径がわかる式まで変形しして 6 点(各 3 点)
- $x^2+y^2-x-y-|x-y|=0$ の表す図形 E を図示して 3 点
- D を図示して 3 点(上記 E の図示がない場合，D が正しければ 6 点)

(2)（配点 18 点）

- $ax+y=k$ のようにおいて，D とこの直線が共有点をもつ k の値の範囲を求める方針に 3 点
- a の値による D との共有点の位置の場合分けを正しく行えて 6 点
- 上記の場合分けにおいてそれぞれ最大値を求めて 9 点(各 3 点)

第 5 問（30 点満点）

(1)（配点 6 点）

- $f'(x)$ を求めて 2 点
- $\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2$ の値を求め，証明できて 4 点

(2)（配点 6 点）

- 点 P における接線の方程式を求めて 3 点
- 答えに 3 点

(3)（配点 18 点）

- QH の長さを絶対値を外した形で求めて 3 点
- V を t の式で表して 3 点
- V を u の式で表して 3 点
- u のとり得る値の範囲を求めて 2 点
- V (または $3V$)を u の関数とみたときの増減を調べて 4 点
- 答えに 3 点(ただし，u のとり得る値の範囲を求めていないものはここの加点なし)