2021 年第 2 回 10 月東北大本番レベル模試　(2021 年 10 月 10 日実施)

採点基準　数学(文系)

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(200 点満点)

第 1 問(50 点満点)

(1) (配点 25 点)

- 点 P, Q の位置ベクトルをパラメータで表して 4 点
- 点 G の位置ベクトルを上記のパラメータで表して 9 点
- 点 G の動く領域を正しく説明して 7 点
- 答えの図に 5 点

(2) (配点 25 点)

- 点 R の位置ベクトルをパラメータで表して 5 点
- 点 G の存在範囲の説明に 5 点
- 点 G の存在範囲の図示に 5 点
- 点 G の存在範囲の面積の計算と答えに 10 点

第 2 問(50 点満点)

(1) (配点 18 点)

- 曲線 C 上の１点における接線の方程式を求めて 4 点
- 上記で求めた接線が点 A を通るとして方程式を立てて 4 点
- 上記の方程式を解いて 4 点
- 答えに 6 点

(2) (配点 16 点)

- 直線 PQ と曲線 C の位置関係の説明に 8 点
- $S(a)$ の計算と答えに 8 点

(3) (配点 16 点)

- 相加平均と相乗平均の不等式を適用できて 6 点
- 上記の不等式の等号が成立する場合を述べて 4 点
- $S(a)$ の最小値とそのときの a の値に 6 点

第 3 問(50 点満点)

(1) (配点 13 点)

- $n \geqq 3$ のときに命題$(*)$が成り立つ例を挙げて 5 点
- 上記の例に対して命題$(*)$が成り立つ根拠を明記して 5 点
- 上記の例を答えとして明記して 3 点

(2) (配点 37 点)

- 背理法の仮定を明記して 5 点
- a と b に同一の素因数で，指数が異なるものがあることを説明して 7 点
- a, b を同一の素因数で指数が異なるものを明示した形で表して 5 点
- 上記の表し方のもとで a^2+b^2, ab を計算して 8 点(各 4 点)
- 上記の計算の結果が仮定と矛盾することを示して 5 点
- 証明の結論を述べて 7 点

第 4 問(50 点満点)

(1) (配点 15 点)

- 箱 A，B から取り出される番号の組合せの数を求めて 5 点
- $X=4$ となる取り出し方の説明と場合の数に 5 点
- 答えに 5 点

(2) (配点 10 点)

- $X=3$ となる取り出し方の説明と場合の数に 5 点
- 答えに 5 点

(3) (配点 25 点)

- k が偶数のときの $X=k$ となる取り出し方の説明と場合の数に 5 点
- k が偶数のときの確率を求めて 5 点
- k が奇数のときの $X=k$ となる取り出し方の説明と場合の数に 10 点
- k が奇数のときの確率を求めて 5 点

2021 年第 2 回 10 月東北大本番レベル模試　(2021 年 10 月 10 日実施)

採点基準　数学(理系)

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】(300 点満点)

第 1 問 (50 点満点)

(1) (配点 15 点)

- 円 C と直線の位置関係が正しく記述できて 3 点
- 円 C が直線 $y=x+1$ と接するときの a の値を求めて 7 点
- 答えに 5 点

(2) (配点 35 点)

- 直線 l の方程式を求めて 5 点
- 点 (X, Y) が直線 l の通過領域に含まれるための条件を示して 3 点
- 上記の X, Y の満たすべき条件とその根拠(図または説明)を示して 8 点
- $f(a)=a^2-(Y-1)a-X$ のようにおいたとき，$f(0)$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ を両方求めて 3 点
- 直線 l の通過領域を不等式で表して 5 点
- 上記の領域に現れる放物線と直線の接点の y 座標を求めて 6 点(各 3 点)
- 正しく図示して 5 点

第 2 問 (50 点満点)

(1) (配点 15 点)

- 数学的帰納法を用いる方針に 3 点
- $n=1, 2$ のとき題意の不等式が成り立つことを示して 2 点
- $n=k, k+1$ で題意の不等式の成立の仮定の下で, $2p^{b_k+1+1}c_{k+1}-p^{b_k+2}c_k$ が p^{k+2} の倍数であることを示して 5 点
- 証明の結論を述べて 5 点

(2) (配点 35 点)

(i)(配点 15 点)

- p で割った余りが等しくなる場合($ke \equiv le \pmod{p}$)の仮定に 5 点
- 題意を満たすのが $k=l$ のときに限ることを示して 5 点
- 証明の結論を述べて 5 点

(ii)(配点 20 点)

- 数列 $\{c_n\}$ が公差 c_2-c_1 の等差数列であることを示して 5 点
- 数列 $\{c_n\}$ の一般項を c_1 , c_2 で表して 3 点
- c_2-c_1 が p の倍数でないと仮定して， p 個の整数を p で割ったときの余りの説明に 4 点
- c_n が p の倍数となる n がただ一つ存在することを示して 5 点
- 証明の結論に 3 点

第 3 問（50 点満点）

(1) (配点 15 点)

- 取り出す玉の色による箱の中の玉の個数の変化の理解に 5 点
- 3 回の試行で箱の中が 4 個になる 3 種類の色の玉が出た回数を求めて 5 点
- 答えに 5 点

(2) (配点 15 点)

- 3 回の試行で箱の中が 5 個になる 3 種類の色の玉が出た回数を求めて 3 点
- 3 回の試行で白玉が 3 回出る確率を求めて 2 点
- 3 回の試行で 3 種類の色の玉が 1 回ずつ出る確率を求めて 7 点
- 答えに 3 点

(3) (配点 20 点)

- n 回の試行で箱の中が 4 個になる 3 種類の色の玉が出た回数を求めて 3 点
- 黒玉が出る回とそれに対応する確率を求めて 8 点
- 上記の和の計算と答えに 9 点

第 4 問(50 点満点)

(1) (配点 15 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の大きさと内積をそれぞれ求めて 3 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めて 5 点
- $x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積から x, y, z の関係式を求めて 5 点
- 答えに 2 点

(2) (配点 10 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値に 3 点
- $x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積から x, y, z の関係式を求めて 5 点
- 答えに 2 点

(3) (配点 25 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表して 4 点
- 2 直線 QA, QB の直交条件を $\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}=0$ とし，さらにこれを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の内積，大きさで表して 5 点
- 上記の計算に必要な内積，大きさを k で表して 5 点

- $\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}=0$ を k の方程式に直して 5 点
- 上記の k の方程式を解いて 3 点
- 対称性から $\overrightarrow{\mathrm{QB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{QC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QA}}=0$ も成り立つことを述べ，答えを示して 3 点

第 5 問(50 点満点)

(1) (配点 30 点)

- 線分 L 上の点 z に対して，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数であることを示して 3 点
- $\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数である条件から $\overline{(\beta-\alpha)}(z-\alpha)-(\beta-\alpha)\overline{(z-\alpha)}=0$ を示して 3 点
- 上記を変形し $z+\alpha\beta\,\overline{z}=\alpha+\beta$ を導いて 8 点
- 上記の式に $z=\dfrac{1}{w}$ を代入し，w, $\overline{w}$ に関する方程式を求めて 5 点
- w の描く円の中心と半径が分かる式(②の式)を求めて 6 点
- 答えに 5 点

(2) (配点 20 点)

- 線分 L の満たす関係式を求めて 5 点
- z が L 上を動くときの w の軌跡を求めて 5 点
- w が描く円弧の半径，中心角を示して 5 点
- 答えに 5 点

第 6 問(50 点満点)

- 2 曲線 C, D の交点の x 座標を α のようにおき $\tan\alpha$ を求めて 5 点
- 上記の α に対して，$\cos\alpha$, $\sin\alpha$ をそれぞれ a, p で表して 5 点
- S_1 , S_2 をそれぞれ計算して 16 点(各 8 点)
- S_1+S_2 を p の関数で表して 4 点
- S_1+S_2 の増減を調べて 15 点
- 答えに 5 点