2022 年度第 1 回東北大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】(300 点満点)

第 1 問 (50 点満点)

(1) (配点 15 点)

- 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $2x+y=4$ の交点の座標を求めて 5 点
- 点 A の座標を求めて 5 点
- 接線の方程式を求めて 5 点

(2) (配点 15 点)

- xy 平面上で円 $x^2+y^2=5$ と直線 $2x+y=4$ をそれぞれ図示して 4 点(各 2 点)
- 上記に座標を記入して 5 点
- 領域を明示して 6 点(境界に対する言及がない場合は 3 点)

(3) (配点 20 点)

- 点 A における接線の傾きに 3 点
- $a \leqq 0$ のときの M に 2 点
- $0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき $ax+y$ が最大となる状況の説明と M に 5 点
- $\dfrac{1}{2} \leqq a<2$ のときの M に 3 点
- $2 \leqq a$ のときの M に 2 点
- 答えを整理して示して 5 点

第 2 問 (50 点満点)

(1) (配点 20 点)

- $f(x)$ を $g(x)$ で割る割り算を実行して 5 点
- $h(x)$ を求めて 5 点
- $g(x)$ を $h(x)$ で割る割り算を実行して 5 点
- $g(x)$ を $h(x)$ で割った余りに 5 点

(2)　(配点 30 点)

- $f(x)=0$ と $g(x)=0$ の共通の解を α のように設定し，α が $(3a+7)\alpha+7a=0$ を満たすことを述べて 5 点
- 上記の設定において，$\alpha=-\dfrac{7a}{3a+7}$ を示して 5 点
- $h(\alpha)$ を a で表して 5 点
- $h(\alpha)=0$ となる a を求めて 5 点
- 上記で求めた a に対してそれぞれ共通の解を求めて 10 点

第 3 問 (50 点満点)

(1)　(配点 10 点)

- n 個の整数から 4 個の整数を選ぶ選び方の総数を求めて 3 点
- 4 つの整数が連続している場合の数を求めて 4 点
- 答えに 3 点

(2)　(配点 20 点)

- 連続した 3 個が左(右)にあり，離れて 1 個が右(左)にある場合の数を求めて 10 点
- 上記と同様，連続した 3 個が右(左)にあり，離れて 1 個が左(右)にある場合の数を求めて 4 点
- 少なくとも 3 つの整数が連続している選び方の数を求めて 3 点
- 少なくとも 3 つの整数が連続している確率を求めて 3 点

(3)　(配点 20 点)

- どの 2 つの数の差も 2 以上となる 4 つの数の選び方を求めて 5 点
- 少なくとも 2 つの整数が連続している選び方の数を求めて 10 点
- 少なくとも 2 つの整数が連続している確率を求めて 5 点

第 4 問 (50 点満点)

(1)　(配点 15 点)

- $\triangle\mathrm{GBC}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$ を述べて 4 点
- $\mathrm{GD}=\dfrac{1}{3}c\sin B$ を示して 4 点
- $\sin B=\dfrac{b}{2}$ を述べて 4 点
- 証明の結論を述べて 3 点

(2)　(配点 20 点)

- $\triangle\mathrm{GDE}$, $\triangle\mathrm{GEF}$, $\triangle\mathrm{GFD}$ のいずれか 1 つの面積を a, b, c で表して 5 点
- 上記の三角形のうちの残りの 2 つの面積を a, b, c で表して 2 点
- T, S をそれぞれ a, b, c で表して 5 点(T ：3 点，S ：2 点)
- $a^2+b^2+c^2=9$ を導いて 3 点

- 残りの証明に 5 点

(3) (配点 15 点)

- (2)で示した式から $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-\dfrac{3}{2}$ を導いて 5 点
- $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \geqq -\dfrac{3}{2}$ となることを示して 5 点
- 残りの証明に 5 点

第 5 問 (50 点満点)

(1) (配点 10 点)

- θ_n を n の式で表して 5 点
- 答えに 5 点

(2) (配点 40 点)

- $\dfrac{\mathrm{OA}_{k-1}}{\mathrm{OA}_k}=\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$ を求めて 3 点
- $\mathrm{OA}_n=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cos\dfrac{\pi}{2^4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}$ を求めて 5 点
- 上記の式の分母に $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ を掛けることにより, $\dfrac{1}{2^n}\sin\dfrac{\pi}{2^2}$ まで変形して 12 点
- $\mathrm{OA}_n=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}}$ を導いて 10 点
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{OA}_n$ を求めて 5 点
- 答えに 5 点

第 6 問 (50 点満点)

(1) (配点 10 点)

- $f'(x)$ を計算して 5 点
- l の方程式に 5 点

(2) (配点 40 点)

- C と l の交点の x 座標を求めて 3 点
- $0 \leqq x \leqq 1$ で l が C の上にあることを示して 2 点
- 求める面積 S の定積分の式に 5 点

- $I=\int_0^1 (1-x)dx$, $J=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$, $K=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ のように分割して計算する方針に5 点
- 上記の I を計算して 2 点
- 上記の J を計算して 4 点
- 上記の K を計算して 14 点
- 答えに 5 点