2023 年度第 2 回東北大本番レベル模試

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(200 点満点)

第 1 問 (50 点満点)

(1)　(配点 12 点)

- l_1, l_2 の傾きを m のようにおき，その方程式を立てて 3 点
- C の中心 $(0, 1)$ と l_1, l_2 の距離が 1 であることから方程式 $(\sqrt{3}m+1)^2=m^2+1$ を求めて 3 点
- l_1, l_2 の方程式をそれぞれ求めて 6 点(各 3 点)

(2)(i)　(配点 12 点)

- 点 S の座標を θ で表して 3 点
- $\angle \mathrm{ASI}=\theta$ であることを示して 3 点
- SI が $\mathrm{S}(\tan\theta, 0)$ を通る傾き $\tan\theta$ の直線であることを述べて 3 点
- 答えに 3 点

(ii)　(配点 26 点)

- I の x 座標の変域を求める方針に 3 点
- I の x 座標が $\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)x-\tan^2\theta-1=0$ の解であることを述べて 3 点
- $t=\tan\theta$ のようにおいて上記を t の 2 次方程式とみたとき，題意を，x は t の 2 次方程式が $0<t<\sqrt{3}$ に解をもつような範囲を動く，のように言い換えて 3 点
- $f(t)=t^2-xt+1-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ のようにおき，$y=f(t)$ のグラフが $0<t<\sqrt{3}$ で交わる条件を求めて 4 点
- 上記の条件から x の値の範囲をそれぞれ求めて 9 点(各 3 点)
- 答えに 4 点

第 2 問（50 点満点）

(1)　（配点 10 点）

- C と l の交点の x 座標が満たす方程式を求めて 2 点
- C と l が第 1 象限において 2 点で交わることを，$x^2-8x+16-k=0$ が正の 2 解をもつことと言い換えて 2 点
- 上記の 2 次方程式が正の 2 解 α, β をもつ条件を述べて 3 点
- 答えに 3 点

(2)　（配点 25 点）

- 題意の 2 つの部分の面積が等しいことを定積分の式で表して 3 点
- 上記から β の満たす関係式を求めて 8 点
- β が(1)で求めた 2 次方程式の解であることを利用して k を消去して 6 点
- β の値を求めて 4 点
- 答えに 4 点

(3)　（配点 15 点）

- α の値を求めて 5 点
- 残りの計算と答えに 10 点

第 3 問（50 点満点）

(1)　（配点 10 点）

- n を偶奇に分け，それぞれ 2 乗したときに 4 で割った余りを求めて 5 点
- n を 5 で割った余りで分け，それぞれ 2 乗したときに 4 で割った余りを求めて 5 点

(2)　（配点 15 点）

- a, b, c がすべて奇数のとき不適であることを示して 6 点
- a, b, c のうち偶数が 1 つだけのとき不適であることを示して 6 点
- 上記のもとで証明の結論を述べて 3 点

(3)　（配点 25 点）

- $a^2+b^2+c^2$ が偶数かつ 5 の倍数であることを示して 5 点
- a, b, c がすべて偶数であることを示して 5 点
- a, b, c のすべてが偶数でないとき，$a^2+b^2+c^2$ が 5 の倍数とならないことを示して 7 点
- a, b, c の少なくとも 1 つが 5 の倍数であることを示して 3 点
- 上記のもとで証明の結論を述べて 5 点

第４問（50 点満点）

(1)　(配点 20 点)

- 4 枚のカードの取り出し方の総数を求めて 4 点
- 4 枚のカードの数字が 2 種類で，その 2 種類が 1 枚と 3 枚のときの場合の数に 3 点
- 4 枚のカードの数字が 2 種類で，その 2 種類が 2 枚ずつのときの場合の数に 3 点
- $p(2)$ を求めて 4 点
- 4 枚のカードの数字が 4 種類であるときの場合の数に 3 点
- $p(4)$ を求めて 3 点

(2)　(配点 15 点)

- $p(4) \geqq p(2)$ を $(n-1)\left\{(n-2)(n-3)-7\right\} \geqq 0$ または $(n-1)(n^2-5n-1) \geqq 0$ まで整理して 5 点
- $5 < \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} < 6$ を述べて 5 点
- 答えに 5 点

(3)　(配点 15 点)

- $p(2) > \dfrac{1}{7}$ から $n^3-49n+49<0$ まで整理して 5 点
- $f(x)=x^3-49x+49$ とおいたとき，$f(x)$ が $x \geqq 5$ で単調に増加すること，および $f(4)<0,\ f(5)<0,\ f(6)<0,\ f(n)>0$　$(n \geqq 7)$ を述べて 5 点
- 答えに 5 点