2022 年度第 2 回東北大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】(300 点満点)

第 1 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- 円 C の中心を (a, b)，半径を r のようにおき，l と C が接する条件を立式して 4 点
- 上記を t で整理して，$(-a-1\pm r)t^2+4bt+4(a-1\pm r)=0$ を導いて 4 点
- a, b, r を求めて 4 点
- 円 C の方程式に 4 点
- 接点の座標を t を用いて表して 4 点

(2)（配点 30 点）

- 直線 l の方程式を t の方程式とみて，その解が $-1\leqq t\leqq 1$ に存在すると言い換えて 3 点
- $x+1=0$ のとき，y のとり得る値の範囲を求めて 4 点
- $x+1>0$ のとき，上記の t の 2 次方程式が $-1\leqq t\leqq 1$ に少なくとも 1 つの解をもつ条件を述べて 4 点
- 上記を x, y の式に直して 8 点
- $x+1<0$ のとき，上記の t の 2 次方程式が $-1\leqq t\leqq 1$ に 2 つの解をもつことがないことを述べて 4 点
- 求める領域を式で示して 3 点
- 図示に 4 点

第 2 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- 4 枚のカードの取り出し方の総数を求めて 4 点
- 4 枚のカードの数字が 2 種類で，その 2 種類が 1 枚と 3 枚のときの場合の数に 3 点
- 4 枚のカードの数字が 2 種類で，その 2 種類が 2 枚ずつのときの場合の数に 3 点
- $p(2)$ を求めて 4 点
- 4 枚のカードの数字が 4 種類であるときの場合の数に 3 点
- $p(4)$ を求めて 3 点

(2)　(配点 15 点)

- $p(4) \geqq p(2)$ を $(n-1)\left\{(n-2)(n-3)-7\right\} \geqq 0$ または $(n-1)(n^2-5n-1) \geqq 0$ まで整理して 5 点
- $5 < \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} < 6$ を述べて 5 点
- 答えに 5 点

(3)　(配点 15 点)

- $p(2) > \dfrac{1}{7}$ から $n^3-49n+49<0$ まで整理して 5 点
- $f(x)=x^3-49x+49$ とおいたとき，$f(x)$ が $x \geqq 5$ で単調に増加すること，および $f(4)<0,\ f(5)<0,\ f(6)<0,\ f(n)>0\ \ (n \geqq 7)$ を述べて 5 点
- 答えに 5 点

第 3 問 (50 点満点)

(1)　(配点 15 点)

- a_3 , a_4 , a_5 の値を求めて 3 点(各 1 点)
- すべての a_n $(n \geqq 1)$ が整数であることを示して 3 点
- $n \geqq 4$ のとき，a_n と a_{n-3} の偶奇が等しいことを示して 4 点
- a_n を 2 で割った余りが周期 3 で繰り返すことを述べ，結論を述べて 5 点

(2)　(配点 10 点)

- a_n が 3 の倍数でなければ，a_{n+2} も 3 の倍数でないことを示して 5 点
- a_1 , a_2 が 3 の倍数でないことを示したうえで残りの証明をして 5 点

(3)　(配点 25 点)

- a_n が偶数であるための n の形を示して 4 点
- $n \geqq 5$ のとき，a_n を 3 で割った余りと a_{n-4} を 3 で割った余りが等しいことを示し，a_n を 3 で割った余りが周期 4 で繰り返すことを述べて 4 点
- a_n を 3 で割って 2 余る n の形を示して 4 点
- a_n が偶数かつ 3 で割って 2 余る n の形をそれぞれ求めて 8 点(各 4 点)
- 答えに 5 点

第 4 問 (50 点満点)

(1)　(配点 10 点)

- $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}+3\,\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=5k+3=0$ に 6 点
- 答えに 4 点

(2)　(配点 20 点)

- $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2,\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2,\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2$ および $\sin\angle\mathrm{BAC}$ をそれぞれ求めて 16 点(各 4 点)
- 答えに 4 点

(3) (配点 20 点)

- 3 点 A, B, C で定まる平面と直線 OD との交点を H としたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ をパラメータと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表して 4 点
- 上記のパラメータの値を求め，さらに $\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$ を求めて 8 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と平面 ABC が垂直であることを示して 4 点
- 答えに 4 点

第 5 問 (50 点満点)

(1) (配点 15 点)

- $\mathrm{P}(z)$ が線分 AB 上にあるとき，$z=1+ti$ のように表し，w の実部，虚部を t を用いて表して 5 点
- 曲線 C_1 を表す方程式と変域を示して 5 点
- 図示に 5 点

(2) (配点 15 点)

- $v=X+Yi$ (X, Y は実数)のようにおいたとき，$t=-\dfrac{Y}{X}$ を示して 5 点
- 上記のもと $(X+4)^2+Y^2=16$ を求めて 5 点
- 曲線 C_2 を表す方程式と変域，および図示に 5 点

(3) (配点 20 点)

- C_1, C_2 の共有点の座標を求めて 4 点
- 面積を求める領域の図示に 4 点
- S_1, S_2 をそれぞれ求めて 8 点(各 4 点)
- 答えに 4 点

第 6 問 (50 点満点)

(1) (配点 10 点)

- 正しい計算と答えに 10 点

(2) (配点 40 点)

- $a \leqq 0$ のとき，$f(a)$ を求めて 10 点
- $a \geqq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ のとき，$f(a)$ を求めて 5 点
- $f(a)$ が，区間 $0 \leqq a \leqq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ で最小値を取ることを示して 5 点
- $0 \leqq a \leqq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ のとき，$\alpha e^{\alpha}=a$ $(0 \leqq \alpha \leqq \sqrt{2})$ となるような α を設定し，$f(a)$ を α で表して 10 点
- 上記の $f(a)$ を $h(\alpha)$ のようにおき，$h'(\alpha)$ を符号変化がわかる形で求めて 5 点
- 答えに 5 点