2024 年度第 2 回東北大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】(300 点満点)

第 1 問（50 点満点）

(1)　(配点 7 点)

- 円 D の中心が $\left(\dfrac{1}{2}, t\right)$ とおけることを述べて 2 点
- 円 D の中心の y 座標が求められて 3 点
- 答えに 2 点

(2)　(配点 15 点)

- $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}$ が単調増加であることを述べて 5 点
- $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}=0$ を示して 3 点
- $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}$ を述べて 2 点
- 答えに 5 点

(3)　(配点 28 点)

- 円 D の方程式を t を用いて表せて 3 点
- t のとり得る値の範囲に 2 点
- 点 (x, y) が D の描く領域に属することの必要十分条件を述べて 3 点
- $y=0$ のとき，$(x, y)=(0, 0), (1, 0)$ であることを述べて 2 点
- $y\neq 0$ のとき t の範囲から $0<\dfrac{x^2-x+y^2}{y}<1$ を示して 3 点
- $y>0$，$y<0$ のとき D の通過する領域をそれぞれ求めて 6 点(各 3 点)
- 上記を全てまとめて D の通過領域が境界のどこを含むか言及して 2 点
- 図示に 4 点
- 面積を求めて 3 点

第 2 問（50 点満点）

(1)　(配点 30 点)

- 操作後箱に入っている白球(または赤球)の個数に着目し，5 つの状態に整理して 5 点
- 箱 K, L の中の白球の個数の推移のいずれかの確率を求めて 5 点
- 箱 K, L の中の白球が (K, L) = (4, 0), (3, 1) の状態をそれぞれ A, B としたとき，
  $A \to B$, $B \to A$, $B \to B$ となる確率をそれぞれ求めて 10 点(各 3 点，すべて求めて 1 点加点)
- 答えに 10 点

(2)　(配点 20 点)

- 操作 S を 5 回繰り返したとき，2 つの箱の中の球の色が初めと同じになる 6 通りの状態推移をすべて挙げて 10 点
- 求める確率を立式できて 7 点
- 答えに 3 点

第 3 問（50 点満点）

(1)　(配点 15 点)

- 定義から $0 \leqq x_1 < 100$ を述べて 3 点
- $x_1 = \dfrac{100k - 1}{9}$ (k は整数) と表せることを示して 3 点
- 上記の k を 9 で割った余りが 1 であることを示して 4 点
- 答えに 5 点

(2)　(配点 15 点)

- 定義から $0 \leqq x_n < 10^{n+1}$ を述べて 3 点
- $x_n = \dfrac{10^{n+1} l - 1}{9}$ (l は整数) と表せることを示して 3 点
- l を 9 で割った余りが 1 であることを示して 4 点
- 答えに 5 点

(3)　(配点 20 点)

- $n \geqq 1$ とし，${x_n}^2 - 1$ が 10^{n+1} で割り切れることを式で表して 5 点
- 80 が 10^{n+1} で割り切れることが導かれることを述べて 5 点
- 上記から 80 が 100 で割り切れる矛盾を述べて 5 点
- 上記のもと証明の結論を述べて 5 点

第 4 問（50 点満点）

(1)　(配点 20 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ示して 10 点(各 5 点)
- $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ を示して 5 点
- 上記のもと証明の結論を述べて 5 点

(2) (配点 5 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を示せて 5 点

(3) (配点 25 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ を示して 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示して 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$ を示して 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ を示して 5 点
- 上記のもと証明の結論を述べて 5 点

第 5 問 (50 点満点)

(1) (配点 20 点)

- 条件の式を $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2=\dfrac{\alpha}{\beta}$ に変形して 5 点
- 条件の式を $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3=1$ に変形して 5 点
- $\dfrac{\beta}{\alpha}\neq 1$ かつ $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部が正であることを述べた上で $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めて 5 点
- $\dfrac{\gamma}{\alpha}$ を求めて 5 点

(2) (配点 10 点)

- $\gamma-\alpha$ と $\beta-\alpha$ の関係式を求めて 5 点
- 上記から問題文の等式を示せて 5 点

(3) (配点 20 点)

- $\beta=\omega\alpha,\ \gamma=\dfrac{\omega^2}{k}\alpha$ を(2)で示した等式に代入して 5 点
- 上記の式から $-2\omega k^2+\omega k+\omega=0$ を導いて 5 点
- 上記を ω で割り, $(2k+1)(k-1)=0$ まで変形できて 5 点
- 答えに 5 点

第 6 問 (50 点満点)

(1) (配点 15 点)

- D の概形を図示できて 5 点
- 不定積分 $\int \log x dx$ を計算できて 5 点(下記定積分の計算中にあってもよい)
- 答えに 5 点

(2)　(配点 15 点)

- V_x を求めて 5 点
- $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V_x}{S\log a}$ を求める計算と答えに 10 点

(3)　(配点 20 点)

- V_y を求めて 5 点
- $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V_y}{Sa}$ を求める計算と答えに 15 点