2023 年度第 2 回 阪大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】（250 点満点）

第 1 問（50 点満点）

(1) (配点 16 点)

- $a_1 = \int_0^1 t^2 e^t dt$ を述べて 3 点
- 上記の定積分の計算を行い，a_1 の値を求めて 9 点
- $f_1(x)$ を求めて 4 点

(2) (配点 16 点)

- $a_{n+1} = \int_0^1 te^t f_n(t)dt$ を述べて 3 点
- $f_n(t)$ を求めて 3 点
- 残りの計算と答えに 10 点

(3) (配点 18 点)

- (2)の結果を，$a_{n+1} - \frac{e}{2} = \left(1 - \frac{e}{2}\right)\left(a_n - \frac{e}{2}\right)$ に変形して 4 点
- 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めて 4 点
- $\left|1 - \frac{2}{e}\right| < 1$ を述べた上で，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めて 7 点
- 答えに 3 点

第 2 問（50 点満点）

(1) (配点 18 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角 θ を設定して 3 点
- 上記の設定のもと，θ の値の範囲を求めて 3 点
- $S = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\sin\theta$ を述べて 3 点
- 残りの証明に 9 点

(2) (配点 32 点)

- $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OH}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ に 4 点
- (1)の結果を用いて，d を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で表した式(解答解説の③)を求めて 4 点
- 曲線 C 上の点 P を $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ のようにパラメータ表示して 4 点
- 上記のパラメータ表示のもと，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ を $x,\ y$ で表して 8 点
- 上記のパラメータ表示のもと，d^2 を $x,\ y$ で表して 4 点
- $d=1$ を示す残りの証明に 8 点

第 3 問（50 点満点）

(1) (配点 21 点)

- 3 点 $0,\ \alpha^2,\ \beta^2$ が三角形をなすことを表した式(解答解説の①)に 3 点
- $\alpha\beta$ が三角形の外心であることを表した式(解答解説の②)に 3 点
- $|\alpha-\beta|=|\beta|,\ |\alpha-\beta|=|\alpha|$ を導いた上で，3 点 $0,\ \alpha,\ \beta$ が正三角形をなすことを示して 6 点
- $\omega=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ に対して，$\alpha=\omega\beta$ または $\alpha=\overline{\omega}\,\beta$ ($\beta=\omega\alpha$ または $\beta=\overline{\omega}\,\alpha$ でも可)を述べて 3 点
- 上記の $\alpha=\omega\beta$ または $\alpha=\overline{\omega}\,\beta$ それぞれに対して，$\alpha^3+\beta^3=0$ を示して 6 点(各 3 点)

(2) (配点 29 点)

- 3 点 $0,\ \alpha,\ \beta$ が三角形をなすことを表した式(解答解説の⑤)に 3 点
- $\alpha^3+\beta^3=0$ から $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ を導いて 3 点
- $\alpha,\ \beta$ の関係を(1)の ω で表す，または 3 点 $0,\ \alpha,\ \beta$ が正三角形をなすことを述べて 3 点
- $\alpha=\omega\beta$ のとき，3 点 $0,\ \alpha^2,\ \beta^2$ が三角形をなすことを示して 3 点
- $\omega^2=\omega-1$ を用いて 3 点 $0,\ \alpha^2,\ \beta^2$ のなす三角形の外心が $\alpha\beta$ であることを示して 9 点
- $\alpha=\overline{\omega}\,\beta$ のとき，$(\overline{\omega})^2=\overline{\omega}-1$ を用いて 3 点 $0,\ \alpha^2,\ \beta^2$ のなす三角形の外心が $\alpha\beta$ であることを示して 8 点

第 4 問（50 点満点）

(1) (配点 12 点)

- $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n$ はすべて 4 または 2 であることを述べて 4 点
- $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_n$ がすべて偶数であることを述べて 4 点
- 答えに 4 点

(2) (配点 16 点)

- $P(a_n=2)=P(a_n\geqq 2)-P(a_n=4)$ を述べて 4 点
- $a_n=4 \Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=4$ を述べて 4 点
- $P(a_n=4)$ を求めて 4 点

- 答えに 4 点

(3) (配点 22 点)

- 事象 E, A を $E : a_n = 1$, $A : a_{n-1} = 2$ で定めたとき，求める確率が $P_E(A)$ であり，
  $P_E(A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(E)}$ を述べて 6 点
- $P(E)$ を求めて 6 点
- $E \cap A$ となるのが，$a_{n-1} = 2$ かつ $x_n =$(奇数) であることを述べて 3 点
- $P(E \cap A)$ を求めて 3 点
- 答えに 4 点

第 5 問（50 点満点）

(1) (配点 20 点)

- $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ をそれぞれ計算して 9 点(各 3 点)
- $g(x) = 6\cos^4 x + 4\cos^2 x - 6$ のように設定し，$g'(x)$ を求めて 6 点
- 上記の設定のもと，$g(x)$ の増減と $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) < 0$ を述べて 3 点
- 残りの証明に 2 点

(2) (配点 16 点)

- (1)の $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$, $g(x) = 0$ となる x を α のように設定して 2 点
- $f''(x)$ の増減と $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) < 0$ を述べて 3 点
- $\alpha < x < \dfrac{\pi}{3}$ において，$f''(x) = 0$ となる x を β のように設定して 2 点
- $f'(x)$ の増減と $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) > 0$ を述べて 3 点
- 右側の不等式 $\tan x \leqq x^3 + x$ の残りの証明に 3 点
- 左側の不等式 $x \leqq \tan x$ の証明に 3 点

(3) (配点 14 点)

- $0 < h < 1$, $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq h\sin x < 1$ であることを述べて 3 点
- 上記を(2)に用いた式 $h\sin x \leqq \tan(h\sin x) \leqq (h\sin x)^3 + h\sin x$ に 3 点
- 上記の式の辺々を $0 \leqq x \leqq \pi$ で積分した式に 4 点
- 残りの計算と答えに 4 点