2024 年度第 3 回 阪大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】(250 点満点)

第 1 問（50 点満点）

(1) (配点 20 点)

- x^{2n-1} を積分する部分積分を行うことが読み取れて 5 点
- 上記の方針で部分積分を 2 回行った各式に 10 点(各 5 点)
- 残りの証明に 5 点

(2) (配点 30 点)

- (1)で示した式から na_n を作って 5 点
- $0 \leqq x^{2n+3}e^{x^2} \leqq e$ を示して 10 点
- $0 \leqq a_{n+2} \leqq e$ を示して 5 点
- $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n+1}=0$ をはさみうちの原理を利用して証明して 5 点
- 残りの証明と答えに 5 点

第 2 問（50 点満点）

(1) (配点 20 点)

- 適切な変数の設定に 4 点
- S を上記で設定した変数の関数として表して 4 点
- 上記の関数の微分を行い，符号の変化を追跡できる形に変形して 6 点
- 上記の関数の増減を調べて 3 点
- 答えに 3 点

(2) (配点 30 点)

- 台形 ABCD の外接円 C_1 の中心が AB の中点 $\mathrm{O_1}$ と一致し，$\mathrm{O_1A}=\mathrm{O_1B}=\mathrm{O_1D}$ が成立することを述べて 2 点
- $\angle\mathrm{EO_1A}=\angle\mathrm{EO_1B}=\angle\mathrm{EO_1D}=\dfrac{\pi}{2}$ を説明して 2 点
- $\mathrm{O_1E}\perp$(平面ABCD)を述べて 6 点
- 四角錐 E－ABCD が内接する球面の中心を O とするとき，$\mathrm{O_1O}$ (または $\mathrm{EO_1}$)を変数として $d=\mathrm{OO_1}$ のようにおけて 4 点

- $\theta = \angle \mathrm{BO_1C}$ と上記の d を用いて四角錐 E－ABCD の体積 V を表して 4 点
- $0 \leqq d < 1$ なる任意の d を固定したもとでの V の最大値(解答解説の②)を求めて 6 点
- 残りの計算と答えに 6 点

第 3 問（50 点満点）

(1) (配点 18 点)

- 線分 PQ の中点 M の座標をパラメータ表示し，それぞれ t で微分して 4 点
- 点 M の動きを表す増減の表がかけて 6 点
- 曲線 C の概形に 4 点
- 答えに 4 点

(2) (配点 32 点)

- 求める回転体の体積 V を表す定積分の式(解答解説の③)に 4 点
- 正しく置換できて 4 点
- 上記の定積分を解答解説の $(*)$ のように 2 つに分けて 4 点
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^t \sin^2 t\,dt$ を求める計算と答えに 12 点
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3 t\,dt$ を求めて 4 点
- 答えに 4 点

第 4 問（50 点満点）

(1) (配点 21 点)

- 点 A における C の接線 l 上に点 $\mathrm{P}(z)$ があることと，$\mathrm{AP} \perp \mathrm{OA}$，または $\mathrm{P} = \mathrm{A}$ が同値であることを述べて 3 点
- l を表す z の方程式が $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = 2$ であることを示して 6 点
- 点 $\mathrm{B}(1)$ での接線 m を表す z の方程式が $z + \overline{z} = 2$ であることを示して 4 点
- 残りの計算と答えに 8 点

(2) (配点 9 点)

- $\mathrm{S}(z_1)$ を通り直線 OB に平行な直線 n の方程式を $z - \overline{z} = z_1 - \overline{z_1}$ と求められて 3 点
- z_2 が上記の式を満たし，さらに $z_2 = ka$ から z_1, z_2 を消去した k の方程式を求めて 3 点
- 残りの証明に 3 点

(3) (配点 20 点)

- α を極形式で表して 3 点
- z_2 を θ を用いて表した式（解答解説の⑤）に 3 点
- $z_2 = x + yi$ とおいたとき，$\cos\theta, \sin\theta$ をそれぞれ x, y で表して 6 点
- x と y の関係式 $y^2 = 1 - 2x$ が得られて 4 点
- y の変域と残りの証明に答えに 4 点

第5問（50点満点）

(1) (配点12点)

- 1辺を共有できる正方形，頂点を共有できる正方形の色の組をそれぞれ述べられて6点
- $n=2$ の場合の正方形の塗り分け方をすべて列記して3点
- 答えに3点

(2) (配点23点)

- 左端の2つの正方形が白と白である場合と，上下が赤，白である場合にわけて考えられて4点
- 左端の2つの正方形が白と白である場合，左から2列目で解答解説のア～オの5通りに分けられることが述べられて4点
- 上記のア，イに対し，理由と合わせてアが x_n 通り，イが y_n 通りであることを述べて4点
- 上記のウ，エ，オに対し，理由と合わせてそれぞれが y_n 通りであることを述べて4点
- 左端の2つの正方形の上下が赤，白である場合，左から2列目で解答解説のカ，キの2通りに分けられることを述べ，理由と合わせてカが x_n 通り，キが y_n 通りであることを述べて4点
- 答えに3点

(3) (配点15点)

- 求める場合の数 a_n が，理由と合わせ $a_n=x_n+4y_n$ と表せることを述べて4点
- $\{x_n\}$ (または $\{y_n\}$)の漸化式を求めて4点
- $\{x_n\}$ (または $\{y_n\}$)の一般項を求めて4点
- 答えに3点